Phénomènes de transport

Chapitre II : Diffusion thermique

Contents

Phénomènes de transport

Chapitre II : Diffusion thermique

Objectifs :

- *Bilan d'énergie thermique*
- *Lois de la conduction thermique*

1 Les différents modes de transfert thermique

La quantité de chaleur ou *transfert thermique* est l'énergie de nature microscopique échangée à travers la surface qui délimite un système. Il existe trois modes de transfert thermique :

1.1 Le rayonnement

Un corps chaud émet un *rayonnement électromagnétique* qui transporte de l'énergie. Ce transfert thermique par rayonnement ne nécessitent pas la présence d'un milieu matériel, il peut se produire dans le vide.
Exemple : rayonnement du soleil

1.2 La convection

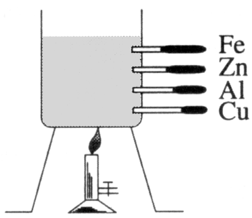
La *convection* est attribuée à un déplacement global (macroscopique) de matière et concerne les liquides ou les gaz.

- Dans les fluides, une variation de température modifie localement la masse volumique du fluide, ce qui entraîne un mouvement d'ensemble du fluide (les parties chaudes, plus légères, ont tendance à s'élever): c'est le phénomène de *convection naturelle*.
  Exemple : chauffage par un convecteur électrique ou un radiateur de chauffage central.
- Un fluide peut aussi être mis en mouvement de manière artificielle pour accélérer les échanges thermiques : c'est le phénomène de *convection forcée*.
  Exemple : échanges thermiques entre la chaudière et les radiateurs d'un chauffage central.

1.3 La conduction ou diffusion thermique

1.3.1 Mise en évidence expérimentale : Expérience de Ingen Housz

L'expérience du physicien hollandais J. Ingen Housz, qui date de 1789, permet de comparer la diffusion thermique dans plusieurs matériaux métalliques. On la réalise facilement en enduisant de cire des tiges métalliques (cuivre, aluminium, fer, zinc), géométriquement identiques, dont une extrémité est en contact avec un thermostat, par exemple un bain d'eau bouillante :



On constate que la température, en des points homologues sur les tiges, augmente au cours du temps, mais plus ou moins rapidement d'une tige à l'autre ; à tout instant en cours d'expérience, les longueurs de cire fondue permettent de comparer le comportement thermique de chaque matériau : la plus grande longueur est obtenue avec le matériau le plus conducteur de la chaleur, ici le cuivre.

Ainsi, lorsqu'une *différence de température* existe dans un matériau, un *flux thermique*, orienté des zones chaudes vers les zones froides, tend à uniformiser la température. Comme, dans le cas considéré, il n'y a pas de déplacement global de matière, pas de variation de l'énergie macroscopique ($E_c + E_{pot\ ext}$) et pas de travail reçu, ce flux thermique est un *flux d'énergie interne non convectif*.

1.3.2 La diffusion thermique

Elle existe dans tous les corps, solides ou fluides. La partie la plus froide s'échauffe au contact de la partie la plus chaude du corps. Cette élévation de température correspond à un accroissement de :

- l'énergie microscopique de vibration du réseau cristallin pour les solides ;
- l'énergie cinétique microscopique d'agitation désordonnée des molécules d'un fluide, dû aux chocs incessants entre ces molécules.

Ce transfert thermique ne s'accompagne pas, à l'échelle macroscopique, de mouvement de matière.
C'est le seul mécanisme qui intervienne dans les solides homogènes et opaques. Dans les fluides, la conduction est souvent masquée par le phénomène de convection.
Un milieu dont la température n'est pas homogène est au moins le siège de phénomènes de transfert thermique par conduction.

1.3.3 Conclusion

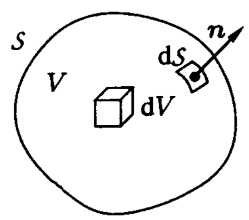
Un phénomène de diffusion thermique apparaît donc comme une phénomène de transfert thermique sans mouvement mascroscopique du support. Ce transfert se produit dans un système initialement hors équilibre, des régions chaudes vers les régions froides ; il tend donc à uniformiser la température.
Le phénomène de diffusion est irréversible.

1.3.4 Notion d'équilibre thermodynamique local

Dans les processus précédent de diffusion thermique on ne peut plus parler de LA température du corps : des thermomètres placés en divers points n'indiquent pas la même température. On suppose que l'on peut définir en chaque point du système, une *température locale* même s'il n'est pas en équilibre thermique globalement: cette hypothèse nécessite un *équilibre local*. Cela correspond pour les gaz au cas où localement la distribution des vitesses est bien décrite par une distribution de Maxwell correspondant à une température locale T.

2 Vecteur densité de courant thermique

Soit un milieu (gaz, solide ou liquide), de volume V délimité par une surface S :



Soit $T(\vec{r},t)$ la température dans ce milieu (on suppose donc qu'elle est définit localement).
Soit $\delta^2 Q(\vec{r},t)$ la quantité d'énergie qui traverse par conduction thermique l'élément de surface $d\vec{S}$ (centré sur M) entre et $t+dt$.
Physiquement $\delta^2 Q$ est d'autant plus important que dS et dt sont grands. On admet que l'on peut écrire :

$$\delta^2 Q(\vec{r},t) = \vec{j}_{th}(\vec{r},t).d\vec{S}\,dt = \delta\phi(\vec{r},t)\,dt \quad \text{avec} \quad \delta\phi(\vec{r},t) = \frac{\delta^2 Q(\vec{r},t)}{dt} = \vec{j}_{th}(\vec{r},t).d\vec{S}$$

Le *flux thermique* ϕ est la quantité d'énergie qui traverse une surface S par unité de temps.
Pendant une durée dt, l'énergie qui traverse S vaut $\delta Q = \phi\,dt$.
ϕ est le flux du *vecteur densité de courant thermique* $\vec{j}_{th}$ à travers la surface S

$$\delta\phi = \vec{j}_{th}.d\vec{S} \quad \text{ou} \quad \phi = \oint\!\!\oint_S \vec{j}_{th}.d\vec{S}$$

Unités :

δQ est une énergie et s'exprime en Joule (symbole J);
ϕ est une puissance et s'exprime en Watt (symbole W);
j_{th} s'exprime en $\mathrm{W.m^{-2}}$.

3 Loi de Fourier

Cette loi, *établie expérimentalement* par Fourier, est de nature phénoménologique comme le sont les lois d'Ohm et de Fick. C'est donc une loi constitutive et non structurelle. Elle traduit, à l'approximation linéaire, la proportionnalité du courant volumique thermique $\vec{j}_{th}(\vec{r},t)$ et du gradient de la température $T(\vec{r},t)$, ce que l'on écrit sous la forme :

$$\boxed{\vec{j}_{th} = -K\ \overrightarrow{grad}\ T \text{ avec } K \textit{ conductivité thermique}} \qquad (\textit{Loi de Fourier})$$

Remarques :

1. Le signe moins traduit l'orientation du courant thermique vers les basses températures car le coefficient K est toujours *positif*. K s'exprime en $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ dans le système international.

2. La loi de Fourier est une loi phénoménologique qui rend compte de la diffusion thermique dans de nombreux cas mais elle n'est pas universelle. Comme dans de nombreux cas, le modèle linéaire n'est plus valable pour des écarts de température trop forts ou trop faibles (de l'ordre des fluctuations).

Le tableau ci-dessous donne des valeurs de K pour un certain nombre de matériaux dans des conditions ordinaires de pression et de températures:

matériau		K $(\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}})$	**Type de conducteur thermique**
gaz		$0,006$ à $0,18$	mauvais conducteurs
	air	$0,026$	
liquides (non métalliques)		$0,1$ à 1	conducteurs moyens
	eau	$0,6$	
solides métalliques		10 à 400	excellents conducteurs
	cuivre	390	
	acier	16	
matériaux non métalliques		$0,004$ à 4	
	verre	$1,2$	conducteurs moyens
	béton	$0,92$	conducteurs moyens
	bois	$0,25$	conducteurs moyens
	laine de verre	$0,04$	mauvais conducteurs (isolants thermiques)
	polystyrène expansé	$0,004$	mauvais conducteurs (isolants thermiques)

4 Analogie

Le tableau ci-dessous résume les analogies entre les lois de *Fourier*, *Fick* et d'*Ohm*, qui traduisent toutes les trois des *phénomènes de transport* de particules, d'énergie ou de charge. Elles correspondent à une évolution spontanée du milieu qui tend à estomper son inhomogénéité, conformément au deuxième principe de la thermodynamique.

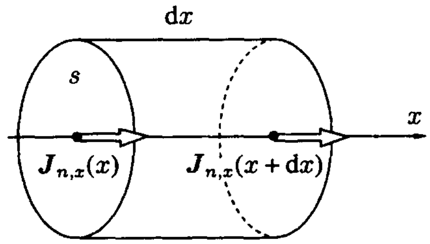
Loi de Fourier	**Loi de Fick**	**Loi d'Ohm**
vecteur densité de courant thermique $\vec{j}$	vecteur densité de particules $\vec{j}$	vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$
température T	densité particulaire n	potentiel V
conductivité thermique K	coefficient de diffusion D	conductivité électrique γ
$\vec{j} = -K\ \overrightarrow{grad}\ T$	$\vec{j} = -D\ \overrightarrow{grad}\ n$	$\vec{j} = -\gamma\ \overrightarrow{grad}\ V$

5 Equation de la diffusion thermique

On considère un corps homogène de masse volumique ρ, de conductivité thermique K et de capacité thermique c. Les grandeurs ρ, K et c sont supposées constantes dans le domaine de température étudié.

5.1 Conduction pure unidimensionnel

On étudie un modèle unidimensionnel : la température du matériau T ne dépend que de l'abscisse x et du temps t.
Soit alors un cylindre élémentaire de section S compris entre les abscisses x et $x + dx$.



On effectue un *bilan énergétique* dans ce cylindre entre t et $t+dt$. On suppose qu'il n'y a pas d'apport d'énergie autre que par conduction :

- à l'abscisse x, il entre une énergie $\delta Q_e = j_{th}(x,t)\,Sdt$
- à l'abscisse $x+dx$, il sort une énergie $\delta Q_s = j_{th}(x+dx,t)\,dSdt$

D'après le premier principe de la thermodynamique appliqué au cylindre élémentaire :

$$\begin{aligned}
dU &= (\rho S dx)\,cdT \\
\text{avec } dU &= \delta Q + \delta W \\
&= \delta Q \qquad (\delta W = 0 \text{ car il n'y a pas d'échange de travail}) \\
&= \delta Q_e - \delta Q_s \\
&= j_{th}(x,t)\,Sdt - j_{th}(x+dx,t)\,Sdt \\
&= -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dxSdt \\
&\Rightarrow\ (\rho S dx)\,cdT = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dxSdt
\end{aligned}$$

dT représente la variation de température du système entre t et $t+dt$ donc

$$\begin{aligned}
dT &= \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt \\
&\Rightarrow\ (\rho S dx)\,c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dxSdt \\
&\Rightarrow\ \rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}
\end{aligned}$$

D'après la loi de Fourier :

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{th} &= -K\frac{\partial T}{\partial x} \\
&\Rightarrow\ \rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\left(-K\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} \\
&\Rightarrow\ \rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Dans le cas où la conduction à une dimension est le seul transfert thermique, la température $T(x,t)$ vérifie l'équation de la diffusion thermique ou équation de la chaleur :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K}\frac{\partial T}{\partial t}} \qquad \textit{(Equation de la diffusion thermique ou de la chaleur)}$$

5.2 Généralisation

Dans certains cas il existe d'autres apports d'énergie (le matériau peut par exemple être parcouru par un courant électrique : le volume Sdx, de résistance dR, traversé par un courant $I = jS$, reçoit par effet Joule, pendant la durée dt, une énergie $\delta Q_J = dRI^2dt = \frac{1}{\sigma}j^2Sdxdt$). Le bilan énergétique s'écrit alors :

$$\rho S dx c dT = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dxSdt + \delta Q_{autres}$$

soit

$$\rho c S\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dxdt = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} Sdxdt + \delta Q_{autres}$$

5.3 Cas à 3 dimensions

Dans le cas à trois dimensions on raisonne sur un volume V délimité par la surface fermée S. Le premier principe de la thermodynamique aplliqué entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\begin{aligned} dU &= \iiint_V \rho c dT d\tau = -\oiint_S \overrightarrow{j}_{th}.d\overrightarrow{S}\, dt + \delta Q_{autres} \\ &\Rightarrow\ dt \iiint_V \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) d\tau = -\iiint_V div\, \overrightarrow{j}_{th}.d\tau\, dt + \delta Q_{autres} \end{aligned}$$

Dans la plupart des cas, l'apport d'énergie autre que par conduction peut s'exprimer en introduisant **la *puissance volumique*** p_{autres} que reçoit localement le corps étudié :

$$\begin{aligned} dt \iiint_V \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) d\tau &= -\iiint_V div\, \overrightarrow{j}_{th}.d\tau\, dt + \iiint_V p_{autres}.d\tau\, dt \\ &\Rightarrow\ \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -div\, \overrightarrow{j}_{th} + p_{autres} \\ &\Rightarrow\ \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = K\Delta T + p_{autres} \end{aligned}$$

Soit p_{autres} la puissance thermique volumique reçue par des mécanismes autres que la conduction.
L'équation de la diffusion thermique s'écrit dans le cas général :

$$\boxed{\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = K\Delta T + p_{autres}}$$ *(Equation de la diffusion thermique ou de la chaleur)*

6 Résolution de l'équation de diffusion

L'équation.de la diffusion thermique permet de déterminer l'évolution de la température $T(M, t)$ en fonction des coordonnées du point M et du temps t.
La résolution exacte de cette équation n'est possible que dans certains cas particuliers ; en général, il est indispensable d'utiliser des méthodes numériques.
La même équation est applicable à des problèmes physiques très différents : les conditions aux limites spatiales et temporelles détermine une solution unique.
Dans tous les cas, *le phénomène est* <u>irréversible</u> *: l'équation de diffusion themique n'est pas invariante dans le changement de variable $t \to -t$.*

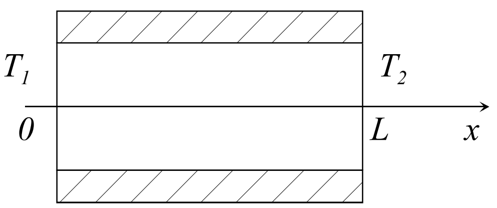
7 Régime stationnaire

Dans ce paragraphe nous supposons qu'il n'y a pas d'autres sources de transfert thermique que la conduction.
En régime stationnaire (indépendant du temps) l'équation de la chaleur se simplifie :

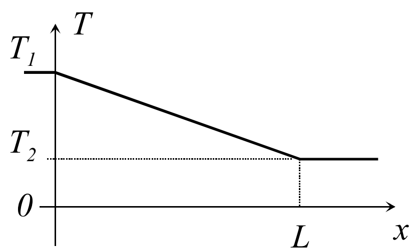
$$\boxed{\Delta T = 0}$$ *(Equation de la diffusion thermique en régime stationnaire)*

7.1 Cas d'une tige isolée

Soit un tige homogène cylindrique (cf. figure 1) de section S, de longueur L, et dont les extrémités sont maintenues aux températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$). Nous supposons de plus qu'il n'y a aucun échange thermique entre la tige et le milieu extérieur par la surface latérale du cylindre (isolation thermique).



<u>*Figure 1*</u>



<u>*Figure 2*</u>

Le régime est stationnaire, la température est donc indépendante du temps. Le problème est unidimensionnel, la température ne dépend donc que de x. L'équation de la chaleur s'écrit alors

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

la température est donc une fonction affine de x : $T(x) = ax + b$. Les conditions aux limites permettent de déterminer a et b :

$$T(0) = T_1 \text{ et } T(L) = T_2 \Rightarrow \boxed{T(x) = \tfrac{T_2 - T_1}{L} x + T_1} \qquad \text{cf. figure 2}$$

Soit K la conductivité thermique du matériau constituant la tige. Le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j}_{th}$ à travers la section S est

$$\overrightarrow{j}_{th} = -K\ \overrightarrow{grad}\ T = K\frac{T_1 - T_2}{L}\vec{e}_x \qquad \overrightarrow{j}_{th} \text{ est constant}$$

le flux thermique ϕ qui traverse la tige est

$$\phi = \oiint_S \overrightarrow{j}_{th}.d\overrightarrow{S} = K\frac{T_1 - T_2}{L}S \qquad \phi \text{ est constant}$$

7.2 Résistance thermique

Soit une tige identique à celle étudiée précédement en régime permanent. Nous pouvons définir la *résistance thermique* R_{th} de la tige :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{1}{K}\frac{L}{S}$$

par analogie avec la définition de la résistance électrique d'une tige conductrice de mêmes dimensions que la tige précédente, de conductivité électrique σ, soumise à une différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ et parcourue par une intensité I (c'est-à-dire un flux de charges électriques) :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}$$

L'inverse de la résistance thermique s'appelle la *conductance thermique :*

$$G_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\phi}{T_1 - T_2} = K\frac{S}{L}$$

En régime permanent, les conductions électrique et thermique sont formellement analogues : la loi d'Ohm correspond à la loi de Fourier, et le régime permanent interdit l'accumulation d'énergie (conduction thermique) ou de charge électrique (conduction électrique). Cette analogie nous permet de définir la résistance thermique dans un cas plus général.

Le flux thermique existant en régime permanent entre les faces d'entrée et de sortie d'un conducteur thermique, qui suit la loi de Fourier, est proportionnel à leur différence de température. On définit alors la résistance thermique

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{G_{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}} \qquad \textit{(Résistance thermique)}$$

Exercice 1 *Double vitrage*

On ne considère que des régimes permanents, indépendant, du temps.

L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe (Ox), et dont le verre a une conductivité thermique K. Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_e < T_i$.

Première partie : On ne tient compte que de la conduction.

1. *La paroi est une vitre simple d'épaisseur e.*
   Évaluer le flux thermique Φ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de K, S, e, T_i et T_e.
   Calculer la résistance thermique R_{th} de la paroi vitrée.

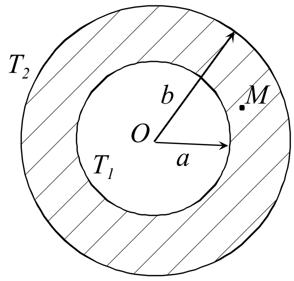
2. *La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur e, séparées par une épaisseur e' d'air, de conductivité thermique K'.*

   (a) Évaluer le flux thermique Φ_2 sortant de la pièce, puis Φ_2/Φ_1.

   (b) A.N. : $Te = 270\,\mathrm{K}$, $T_i = 292\,\mathrm{K}$, $e' = e = 3\,\mathrm{mm}$, $K = 1,2\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$, $K' = 0,025\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.
   Calculer Φ_2/Φ_1 et les températures T_1 et T_2 des faces en regard des deux vitres.
   Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage.

Exercice 2 : *Conduction thermique entre deux sphères concentriques*

Considérons un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O, de rayons a et $(a < b)$, de conductivité thermique K, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ. Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures $T\,(r = a) = T_1$ et $T\,(r = b) = T_2$ et on suppose $T_1 > T_2$.



1. Écrire l'équation aux dérivées partielles que vérifre la température T en un point M, à l'instant t.

2. Déterminer, en régime permanent :

   (a) la température $T(r)$ en tout point M du matériau

   (b) la puissance P transférée entre les deux sphères de rayons a et b ;

   (c) la résistance thermique R_{th} de ce conducteur

8 Transfert conducto-convectif : loi de Newton

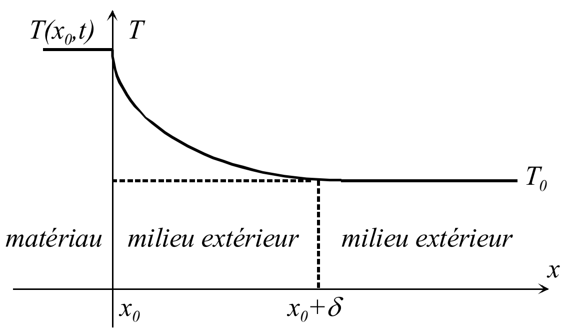
On étudie le cas où le matériau étudié est en contact avec un milieu extérieur de température T_0. On admet souvent que les échanges d'énergie à travers la surface du matériau sont régis par une *loi linéaire*, appelée *loi de Newton* :

Les transferts thermiques entre un corps et le milieu extérieur suivent la loi de Newton si la densité de flux thermique sortant (algébriquement) à travers la surface du matériau est proportionnelle à l'écart de température entre T de la surface du matériau et T_0 du milieu extérieur :

$$\boxed{j_{th} = h\,(T - T_0)} \qquad \textit{(Loi de Newton)}$$

où h désigne le *coefficient de transfert thermique de surface* qui s'exprime en $\mathrm{W.\,m^{-2}.\,K^{-1}}$.

Remarques :



1. On peut relier la loi de Newton à la loi de Fourier. En effet, la température du milieu extérieur n'est égale à T_0 que « suffisamment loin » de la surface de séparation, au-delà d'une couche limite d'épaisseur δ. En fait, la température est continue en x_0, et sa valeur est $T\,(x_0, t)$, y compris dans le milieu extérieur.
   La loi de Newton donne alors :

$$j_{th} = h\,(T - T_0) = h\,(T\,(x_0, t) - T_0) = -\,(\delta h)\,\frac{T\,(x_0 + \delta, t) - T\,(x_0, t)}{\delta}$$

$$\Rightarrow j_{th} \approx (\delta h)\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

   on retrouve une expression analogue à la loi de Fourier avec un coefficient $K' = \delta h$ homogène à une conductivité thermique.

2. Nous utiliserons souvent la loi de Newton pour un contact solide - fluide où les transferts thermiques sont complexes : la conduction an niveau de la paroi du solide est couplée à un phénomène de convection du fluide au voisinage de la paroi du solide sur une couche d'épaisseur δ.

Exercice 3 *Double vitrage (suite)*

Deuxième partie : En plus de la conduction étudiée dans la première partie, on doit tenir compte des échanges thermiques superficiels entre le verre et l'air. Une surface de verre d'aire S, à la température T_S, échange avec l'air, à la température T_f, le flux thermique

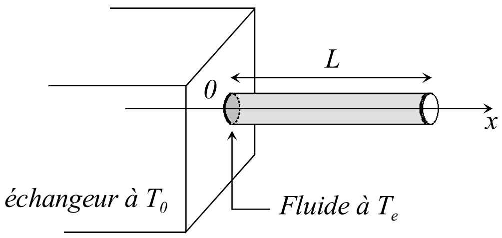
$$\Phi = hS\,(T_S - T_f) \qquad \text{avec } h > 0$$

1. Quelle valeur implicite donnait-on précédemment à h lorsqu'on confondait T_S et T_f ?

2. Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique R_{th}. Donner l'expression de R_{th}.

3. Dans la première partie les températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur de la pièce sont T'_i et T'_e.
Soit h_e le coefficient d'échange entre le verre et l'air extérieur et h_i celui relatif aux autres contacts verre-air.
Les flux Φ_1 et Φ_2, des questions 1) et 2) (première partie) deviennent respectivement Φ'_1 et Φ'_2. Exprimer Φ'_1 et Φ'_2 en fonction de T'_i, T'_e, h_i, h_e et des paramètres e, K, K' et S.
A.N.: $h_i = 10\,\mathrm{W.\,m^{-2}.\,K^{-1}}$ et $h_e = 14\,\mathrm{W.\,m^{-2}.\,K^{-1}}$. Calculer Φ'_2/Φ'_1. Conclusion ?

Exercice 4 *: Ailette de refroidissement*



Une tige de cuivre, pleine, cylindrique, d'axe (Ox), de longueur L, de rayon a et de conductivité thermique K, est au contact par une de ses extrémités (en $x = 0$) avec un échangeur à la température T_0 et par sa surface latérale et son autre extrémité ($x = L$) elle est en contact avec un fluide à la température constante T_e ($T_0 > Te$). Elle joue le rôle d'ailette de refroidissement.

On se place en régime permanent et on suppose qu'à l'intérieur de la tige, le gradient radial de température est suffisamment faible pour considérer que, dans la section droite d'abscisse x, la température $T(x)$ est uniforme.

La tige présente, au niveau de sa surface en contact avec le fluide, des pertes thermiques, par unité de temps et de surface, égales à $h\,(T(x) - T_e)$, si $T(x)$ désigne la température du point de la surface considérée et h un coefficient constant.

1. Déterminer la répartition de température $T(x)$ au sein de la tige.
Calculer $T(L)$.Données : $K = 389\,\mathrm{W.\,m^{-1}.\,K^{-1}}$, $h = 155\,\mathrm{W.\,m^{-2}.\,K^{-1}}$, $a = 1\,\mathrm{mm}$, $T_0 = 340\,\mathrm{K}$, $T_e = 300\,\mathrm{K}$ et $L = 10\,\mathrm{cm}$.

2. En supposant que les pertes thermiques par convection sont données par la même loi pour l'échangeur et pour la tige (même coefficient h), calculer le rapport η des flux thermiques sortant de l'échangeur à travers la surface Σ à la base de l'ailette en $x = 0$ en présence de l'ailette, puis sans l'ailette.
À quelle condition portant sur a, h, et K, η il est-il plus grand que 1 ?
Cette condition est-elle vérifiée avec les valeurs numériques ci-dessus ? Si oui, calculer la valeur de η.

3. Calculer la répartition de température $T'(x)$ que l'on aurait obtenue si on avait supposé l'ailette de longueur infinie. Calculer dans ces mêmes conditions le « rendement » η' correspondant. Comparer les valeurs numériques de η et η'. Conclure.

9 Régime sinusoïdal forcé : onde de température

Le sous-sol est considéré comme un milieu semi-infini, homogène, de conductivité thermique K, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, situé dans le demi-espace $x > 0$.

On suppose que la température de la surface du sol (plan $x = 0$) est soumise à des variations sinusoïdales

$$T_S(t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$$

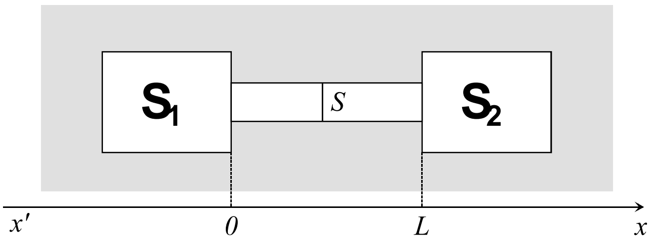
1. Déterminer la température $T(x,t)$ d'un point de profondeur x, en régime sinusoïdal forcé (on utilisera une notation complexe).
2. Commenter le résultat obtenu. Exprimer la vitesse de propagation v de « l'onde thermique » ainsi obtenue.
3. Applications :
   (a) On considère des variations journalières de température, la température variant entre $0\,°\mathrm{C}$ la nuit et $16\,°\mathrm{C}$ le jour. À partir de quelle profondeur, les variations de température sont inférieures à $1\,°\mathrm{C}$? Calculer v.
   Données : $a = 6.10^{-7}\,\mathrm{m}^2.s^{-1}$.
   (b) On considère des variations annuelles de température, la température variant entre $-10\,°\mathrm{C}$ et $26\,°\mathrm{C}$. Répondre aux mêmes questions.

10 Cas du régime non permanent

La résolution analytique de l'équation de la diffusion thermique n'est que très rarement possible. Il sera souvent nécessaire d'effectuer une résolution numérique.

Une étude sommaire de ces différents problèmes sera realisée en travaux dirigés d'informatique.

Exercice 5 *Transfert thermique entre deux corps. Production d'entropie*



Deux corps solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de même capacité thermique C, de conductivités thermiques très grandes (« infinies »), sont reliés par une tige solide de longueur L, de section S, de capacité thermique négligeable et de conductivité thermique K.

On suppose que les contacts entre la tige et les deux corps sont parfaits, et que le système est parfaitement calorifugé. Les températures initiales des deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ valent respectivement T_{10} et T_{20} ($T_{10} > T_{20}$). À un instant t quelconque, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ont des températures égales à T_1 et T_2.

1. On désigne par P le flux thermique passant de $\mathcal{S}_1$ vers $\mathcal{S}_2$ par unité de temps. Vérifier que la résistance thermique ne dépend pas du temps et calculer R_{th}.
2. Déterminer les températures T_1 et T_2 des deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ en fonction du temps.
   (a) En déduire la variation d'entropie du système global constitué par $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et la tige entre l'état initial et l'état d'équilibre final.
   (b) Que devient cette variation d'entropie si on suppose T_{10} et T_{20} voisins ? Pour répondre à cette question, on posera $T_{10} = T_0$ et $T_{20} = T_0 + \Delta T$ (en supposant $\Delta T \ll T_0$) et on exprimera la variation d'entropie ΔS en fonction de T_0, ΔT et C. Conclusion.