

Diffraction à l'infini**Chapitre VII : Les réseaux de diffraction***Objectifs :*

- *Présentation des réseaux de diffraction*
- *Utilisation pour la mesure d'une longueur d'onde*

1. Généralités sur les réseaux**1.1. Position du problème****1.1.1. Rappel sur les performances d'un prisme**

Exploitant la dispersion chromatique lors de la réfraction sur un dioptre air verre, un prisme en verre d'indice $n(\lambda)$ recevant une onde plane incidente formée d'un ensemble de radiations de longueur d'ondes λ sous l'incidence i fournit (sous réserve de conditions d'émergence que nous ne rappellerons pas ici) une onde plane émergente telle que, au minimum de déviation ($i = i_m$), la direction de propagation est déviée (par rapport à la direction de propagation de l'onde incidente) vers sa base d'un angle D , tel que :

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{2 \tan i_m}{n} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)$$

Ainsi la *dispersion* d'un spectroscopie à prisme, qui conditionne son aptitude à séparer des longueurs d'onde très voisines, est physiquement limitée par le pouvoir dispersif du verre dans lequel est taillé le prisme utilisé.

En pratique la dispersion atteinte est de l'ordre de la minute d'arc par nanomètre, ce qui permet difficilement de résoudre (même avec un spectroscopie bien réglé) le doublet jaune du sodium ($\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$).

1.1.2. Interférences à N ondes

Les tracés de la page suivante (§ 1.1.4.) correspondent à la répartition d'intensité obtenue par interférences à l'infini de N ondes identiques (successivement $N = 1, 2, 3, 10$), cohérentes, présentant deux à deux la même différence de marche δ donc déphasées deux à deux d'un angle φ tel que :

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

La répartition d'intensité est tracée en fonction de ce déphasage φ .

On constate que :

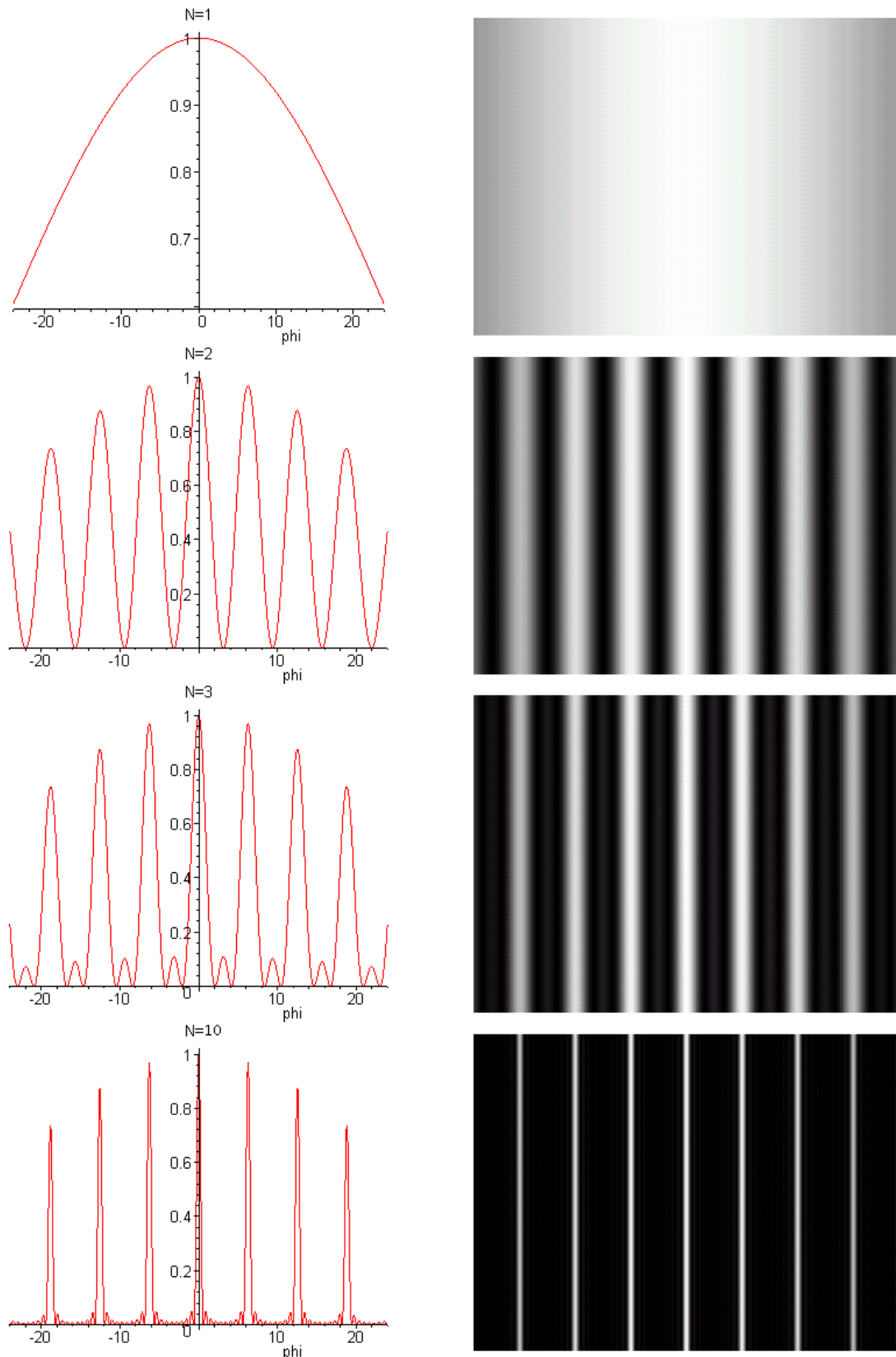
- La position des maxima est indépendante de N , ils correspondent à $\varphi = p2\pi$ avec p entier.
- Les maxima sont d'autant plus fins que N est grand,
- Entre deux maxima "principaux" d'intensité lumineuse, il existe des maxima "secondaires" mais dont l'importance devient négligeable quand N devient grand.

1.1.3. Conclusion

Si l'on parvient à faire interférer dans les conditions précédentes un très grand nombre de sources secondaires, "images" d'une source primaire polychromatique, une dispersion séparera les maxima correspondants aux différentes longueurs d'onde puisque φ est une fonction de λ .

Si d'autre part N est grand, la finesse de ces maxima permettra de séparer des longueurs d'onde très voisines et on peut penser qu'il est ainsi possible d'améliorer les performances d'un prisme.

1.1.4. Tracé de l'intensité pour différentes valeurs de N



1.2. Réseau de diffraction

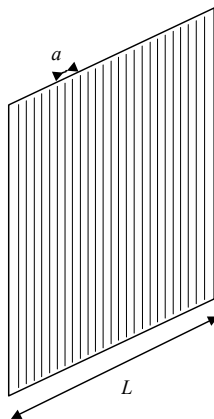
1.2.1. Réseau théorique

Un réseau réalise les interférences à l'infini des ondes diffractées par un grand nombre de sources secondaires cohérentes "images" d'une source unique. La répartition spatiale de l'intensité lumineuse résultant de ces interférences permet, comme avec un prisme, l'analyse spectrale de la lumière incidente.

La modélisation la plus simple est la suivante :

- N fentes très fines, parallèles, équidistantes, appelées *traits* du réseau, dont la largeur est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, provoquent une diffraction pratiquement isotrope.
- La distance a entre deux fentes successives est le *pas* du réseau.
- L'inverse du pas, $1/a$, représente le nombre de traits par unité de longueur.

Les valeurs typiques sont : $\frac{1}{a} = 500 \text{ mm}^{-1}$, gravure sur une longueur $L = 5 \text{ cm}$, $N = \frac{L}{a} \approx 20000$.



1.2.2. Réalisation pratique

Les premiers réseaux de qualité furent construits par Rowland en 1882, en traçant des traits équidistants sur une lame de verre, à l'aide d'une pointe en diamant. Chaque trait diffuse la lumière en dehors de la direction incidente et se comporte ainsi comme une bande opaque. En revanche, les parties situées entre les traits, qui laissent passer la lumière, jouent le rôle des fentes du modèle précédent. La qualité des réseaux est directement liée à la précision du tracé des traits : ils doivent être rigoureusement identiques et le pas rigoureusement constant. Les défauts de périodicité dégradent la qualité des images.

Les réseaux que l'on peut facilement se procurer sont des répliques obtenues en déposant sur une matrice, constituée par un réseau original gravé, une pellicule de résine polymère que l'on détache et que l'on fixe sur une lame de verre. Ces copies sont généralement de bonne qualité et bien meilleur marché (quelques centaines de francs) qu'un réseau original dont la gravure, à raison d'un trait par seconde, demande une journée.

On peut également obtenir de bons réseaux à partir d'interférence d'ondes planes : ce sont les réseaux *holographiques*. Dans le cas de deux ondes, ces réseaux donnent une variation de transparence sinusoïdale avec une période a égale à l'interfrange : on peut obtenir ainsi plus de 1000 traits par millimètre.

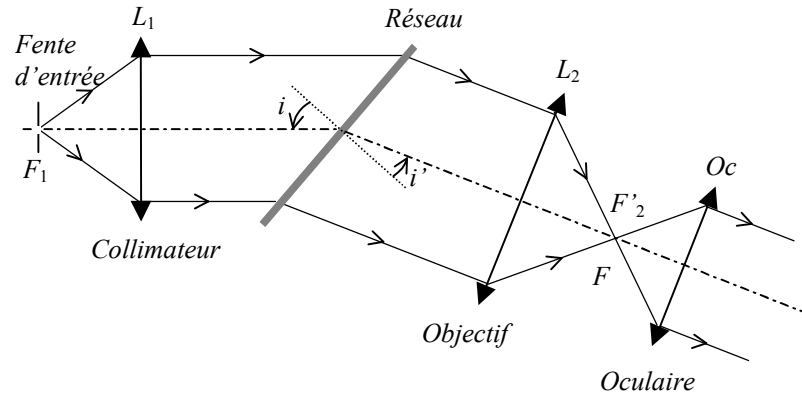
La plupart des réseaux utilisés en spectrométrie travaillent non par transmission mais par réflexion, ce qui permet d'éviter les défauts qu'occasionne la traversée du support (défauts d'homogénéité, de planéité, etc.). On dépose sur les bandes d'un réseau holographique original une couche d'aluminium qui réfléchit la lumière incidente ; les zones en dehors de ces bandes ne réfléchissent pas la lumière et se comportent donc comme des parties opaques.

1.3. Spectroscopie à réseau

Un spectroscopie à réseau est analogue dans son principe à un spectroscopie à prisme.

Le réseau est éclairé en lumière parallèle par un collimateur dont la fente d'entrée est parallèle aux traits.

La lumière diffractée est reçue par une lunette (objectif + oculaire) réglée pour une mise au point à l'infini.

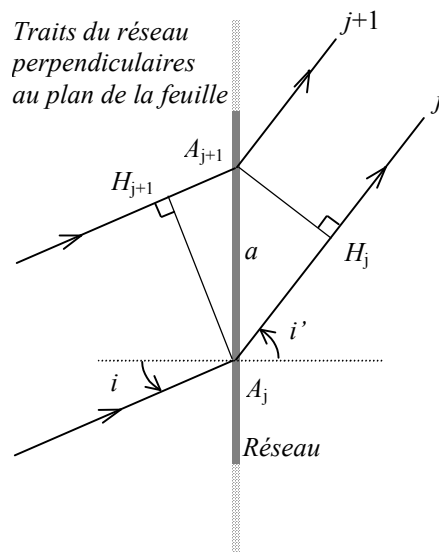


2. Maxima principaux

2.1. Réseau par transmission

Supposons le réseau éclairé en lumière monochromatique sous l'incidence i . Envisageons la lumière diffractée dans la direction i' .

Les angles i et i' sont *algébriques*, orientés de la normale au réseau vers le rayon lumineux.



Calculons la différence de marche entre deux rayons diffractés dans une même direction i' par deux traits successifs du réseau :

$$\begin{aligned}
 \delta &= \delta_j - \delta_{j+1} = (A_j H_j) - (H_{j+1} A_{j+1}) \\
 &= n [A_j H_j - H_{j+1} A_{j+1}] \\
 &= na (\sin i' - \sin i) \\
 &\Rightarrow \boxed{\delta = na (\sin i' - \sin i)}
 \end{aligned}$$

D'où la différence de phase :

$$\varphi = \varphi_j - \varphi_{j+1} = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi na (\sin i' - \sin i)}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i' - \sin i)$$

Ce déphasage pouvait être calculé directement par :

$$\varphi = (\vec{k}_i - \vec{k}_d) \cdot \overrightarrow{A_{j+1}A_j} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i' - \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i' - \sin i)$$

L'intensité lumineuse sera maximale dans les directions i'_p pour lesquelles toutes les vibrations sont en phase $\varphi = p2\pi$ (p entier relatif), soit :

$$\sin i'_p - \sin i = p \frac{\lambda}{a}$$

p est appelé l'ordre du maximum principal dans la direction i'_p .

Excepté dans l'ordre $p = 0$, les directions i'_p dépendent de la longueur d'onde. Le réseau est bien dispersif, sauf pour la lumière directement transmise puisque $p = 0$ correspond à l'égalité des angles i et i' .

Entre deux maxima principaux d'intensité lumineuse, il existe des maxima secondaires (voir les graphes du § 1.1.4.) beaucoup moins intenses (invisibles sur les simulations avec *densit yplot*) qui n'ont pas d'intérêt ici.

2.2. Réseau par réflexion

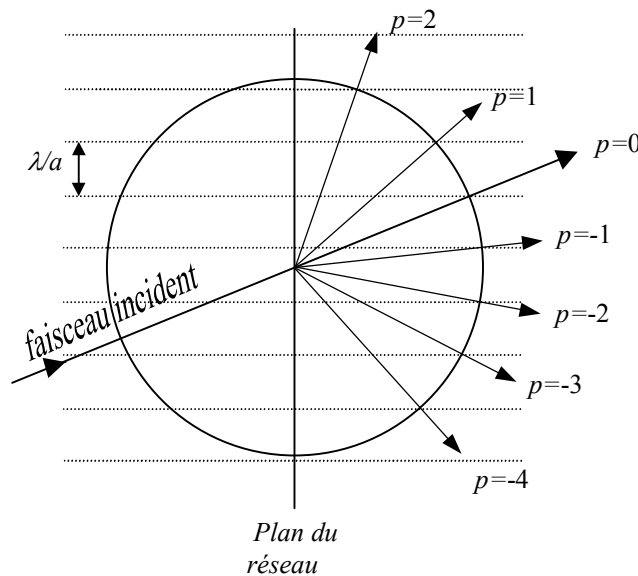
Pour les réseaux travaillant en réflexion, par exemple ceux constitués par gravure sur une surface métallique polie, la formule précédente devient :

$$\sin i'_p + \sin i = p \frac{\lambda}{a}$$

2.3. Construction géométrique des directions des maxima principaux

Considérons un réseau par transmission. Les directions des maxima principaux sont donnés par les angles i'_p tels que $\sin i'_p = \sin i + p \frac{\lambda}{a}$ avec p entier.

Il suffit par conséquent de prendre les intersections du cercle de rayon unité centré sur un point d'incidence avec les droites perpendiculaires au plan du réseau et décalées de λ/a . Le nombre d'ordre est limité par la condition $\sin i + p \frac{\lambda}{a} < 1$.



2.4. Exemple

Calculer, sous incidence normale, les directions des maxima principaux d'ordres $p > 0$ pour $\lambda_1 = 400$ nm et $\lambda_2 = 750$ nm et $\frac{1}{a} = 500$ mm⁻¹.

$$\sin i'_p = \sin i + p \frac{\lambda}{a} =$$

	$\lambda_1 = 400$ nm	$\lambda_2 = 750$ nm
ordre	i'_p	i'_p
1		
2		
3		
4		
5		

Contrairement à un prisme :

- ce sont les plus grandes longueurs d'onde qui sont les plus déviées,
- il existe plusieurs "spectres" qui se recouvrent partiellement.

2.5. Dispersion

Si la lumière incidente contient deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 on remarque que les maxima principaux dans un même ordre sont décalés angulairement et que cet écart augmente avec l'ordre p .

On définit la *dispersion* d'un réseau dans l'ordre p , autour de la longueur d'onde λ , par le déplacement angulaire du maximum principal quand la longueur d'onde varie de $\Delta\lambda$:

$$\sin i'_p - \sin i = p \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \cos i'_p \Delta i'_p = p \frac{\Delta\lambda}{a}$$

D'où la dispersion :

$$\boxed{\frac{\Delta i'_p}{\Delta\lambda} = \frac{p}{a \cos i'_p}}$$

Une faible valeur du pas permet ainsi d'obtenir aisément une dispersion supérieure à celle d'un prisme. Avec $\frac{1}{a} = 500 \text{ mm}^{-1}$, $p = 1$; $\cos i'_p \approx 1 \Rightarrow \frac{\Delta i'_p}{\Delta\lambda} = 5.10^{-4} \text{ rad. nm}^{-1} \approx 2 \text{ minute. nm}^{-1}$.

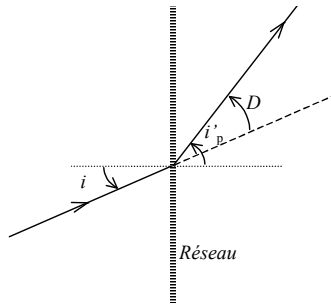
2.6. Recouvrement d'ordres

A partir de l'ordre deux on constate sur l'exemple précédent que les spectres se recouvrent partiellement ce qui rend difficile la détermination de l'ordre dans lequel on a choisit d'observer ainsi que le pointé des raies. On se limite donc en général, pour les mesures, au spectre d'ordre un ou deux dans lesquels les images sont en outre de meilleure qualité.

3. Mesure d'une longueur d'onde

Plusieurs méthodes sont possibles. Nous nous limiterons à l'utilisation du réseau au minimum de déviation. Le protocole est alors semblable à celui utilisé avec un spectroscopie à prisme.

3.1. Existence d'un minimum de déviation



Montrons que la déviation D , qui est donc pour une longueur d'onde donnée et dans un ordre donné une fonction de l'angle d'incidence i , passe par un minimum pour $i = -i'$. Par définition :

$$D = i'_p - i \Rightarrow \frac{dD}{di} = \frac{di'_p}{di} - 1$$

Calculons $\frac{di'_p}{di}$ en différentiant à p et λ constants la formule des réseaux :

$$\sin i'_p - \sin i = p \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \cos i'_p di'_p - \cos i di = d \left(p \frac{\lambda}{a} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dD}{di} = \frac{\cos i}{\cos i'_p} - 1$$

On en déduit que la déviation D , regardée comme une fonction de i , passe par un extremum quand :

$$\frac{dD}{di} = 0 \Rightarrow \frac{\cos i}{\cos i'_p} = 1 \Rightarrow \cos i = \cos i'_p \Rightarrow \begin{cases} i = i'_p \\ i = -i'_p \end{cases}$$

La solution $i = i'_p$ correspond à l'ordre $p = 0$ pour lequel toute la lumière est transmise directement sans diffraction ni dispersion et ne convient donc pas. La déviation passe donc par un extremum pour :

$$D(i = -i'_p) = D_m$$

3.2. Application à la mesure d'une longueur d'onde

3.2.1. Formule d'un réseau au minimum de déviation

La formule des réseaux pouvant s'écrire :

$$\sin i'_p - \sin i = p \frac{\lambda}{a} \Rightarrow 2 \sin \left(\frac{i'_p - i}{2} \right) \cos \left(\frac{i'_p + i}{2} \right) = p \frac{\lambda}{a}$$

Soit encore :

$$2 \sin \left(\frac{D}{2} \right) \cos \left(\frac{i'_p + i}{2} \right) = p \frac{\lambda}{a}$$

Au minimum de déviation $i = -i'_p$ et cette relation devient :

$$2 \sin \left(\frac{D_m}{2} \right) = p \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2a \sin \left(\frac{D_m}{2} \right)}{p}}$$

3.2.2. Mesure d'une longueur d'onde λ

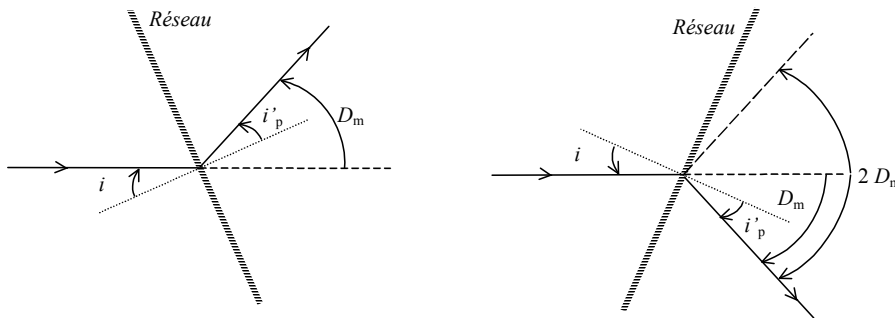
On utilise un goniomètre préalablement réglé, le réseau est placé, traits verticaux, sur une plate forme horizontale. Il est éclairé en lumière parallèle par un collimateur.

Le pas du réseau a est connu, il est généralement donné par le fabricant et indiqué sur la monture du réseau.

L'ordre p dans lequel on choisit de travailler (en pratique le premier ou le second ordre pour un réseau d'environ 500 traits par millimètre) est repéré à partir de l'ordre zéro, c'est à dire de la lumière directement transmise sans décomposition de la lumière incidente : il suffit de compter le nombre d'apparition de la raie à mesurer.

La déviation minimale se détermine, comme pour un prisme, par pointé angulaire avec une lunette réglée à l'infini : on effectue deux mesures dans le même ordre pour des déviations minimales opposées.

La différence des pointés donne $2D_m$.



Exercice 1 : Spectroscopie à réseau plan parfait par transmission au minimum de déviation

Un réseau plan, utilisé par transmission, est formé de traits fins parallèles équidistants de a , gravés sur un support en verre. Le pinceau incident a une direction fixe et fait l'angle variable i_0 avec la normale au réseau qui peut tourner autour d'un axe parallèle aux traits.

1) Le réseau est éclairé en lumière monochromatique de longueur d'onde λ . On observe les maxima de lumière diffractée d'ordre K dans la direction qui fait l'angle i avec la normale au réseau. Exprimer $\sin i$ en fonction de i_0 , K , λ et a .

2) On mesure avec ce réseau la déviation minimale $D_{m0} = 31^\circ 42'$ de la raie verte du mercure ($\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$) pour le spectre d'ordre 2, puis la déviation minimale $D_{m1} = 18^\circ 32'$ pour la raie rouge du cadmium au premier ordre. Calculer

- 2) a) l'angle d'incidence i_0 correspondant à la déviation minimale de la raie verte ;
- 2) b) la longueur d'onde de la raie rouge du cadmium ;
- 2) c) le nombre n de traits par millimètre et le pas a du réseau utilisé.

3) Le réseau est éclairé par la lampe à vapeur de mercure dans les conditions du minimum de déviation de la raie verte (λ_0). La lunette d'observation vise dans la direction i_K des maxima de chacune des raies de longueur d'onde λ du spectre d'ordre K .

- 3) a) Exprimer i_K en fonction de K , λ_0 et n .
- 3) b) Calculer pour les "spectres" d'ordre 2 et 3, les directions i des maxima des principales raies de la lampe à mercure : violette (4078 Å) ; indigo (4358 Å) ; bleue (4916 Å) ; verte (5461 Å) ; jaune 1 (5770 Å) ; jaune 2 (5791 Å) ; rouge (6234 Å).

4) Le réseau est éclairé par une lampe à vapeur de sodium. Calculer la distance ΔX_J qui sépare les deux raies jaunes du sodium, d'ordre 2, dans le plan focal de la lunette d'observation de distance focale $f' = 200$ mm.

5) Calculer le nombre minimal N_0 de traits de ce réseau si on désire séparer les deux raies bleues de la lampe à néon ($\lambda_1 = 4712$ Å et $\lambda_2 = 4715$ Å) dans l'ordre 1.

4. Complément : expression de l'intensité

4.1. Rappels

Dans le chapitre VI § 4.3.5. nous avons obtenu pour l'amplitude totale diffractée par une fente

$$\underline{s}(P) = K \underline{s}_i \iint_{\Sigma} \underline{t}(M) \exp \left[i \left(\vec{k}_i - \vec{k}_d \right) \cdot \overrightarrow{OM} \right] d\Sigma \Rightarrow \underline{s}_{\vec{k}_d} = K \underline{s}_i \int_{x=-a/2}^{x=+a/2} \int_{y=-b/2}^{y=+b/2} \exp \left[i \left(\vec{k}_i - \vec{k}_d \right) \cdot \overrightarrow{OM} \right] dx dy$$

avec les notations des réseaux

$$\begin{aligned} \underline{s}(i') &= K \underline{s}_i \int_{x=-\ell/2}^{x=+\ell/2} \int_{y=-b/2}^{y=+b/2} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} y (\sin i' - \sin i) \right] dx dy \\ &= K \underline{s}_i \ell \int_{y=-b/2}^{y=+b/2} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} y (\sin i' - \sin i) \right] dy \\ &\Rightarrow \underline{s}(P) = K \underline{s}_i \ell b \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b}{\lambda} (\sin i' - \sin i) \right) \end{aligned}$$

4.2. Expression de l'intensité

Nous avons toujours $I = I_0 |F_{diff}|^2 |F_{interf}|^2$. Pour un réseau plan tout se passe comme dans le cas précédent des fentes d'Young mais avec un nombre N de fentes :

$$|F_{diff}|^2 = \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi b (\sin i' - \sin i)}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b (\sin i' - \sin i)}{\lambda}} \right)^2 \quad \text{et} \quad |F_{interf}|^2 = \left| \sum_{m=1}^N \exp \left[j \left(\vec{k}_i - \vec{k}_d \right) \cdot \overrightarrow{OO_m} \right] \right|^2$$

Nous choisissons pour O la position de la fente "0" ; en notant a le pas du réseau, nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO_m} &= m a \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{a} \text{ vecteur unitaire parallèle au réseau} \\ \Rightarrow F_{interf} &= \sum_{m=1}^N \exp \left[j \left(\vec{k}_i - \vec{k}_d \right) \cdot \overrightarrow{OO_m} \right] = \sum_{m=1}^N \exp \left[j \left(\vec{k}_i - \vec{k}_d \right) \cdot m a \vec{u} \right] \\ \Rightarrow F_{interf} &= \sum_{m=1}^N \exp \left[j \left(\vec{k}_i - \vec{k}_d \right) \cdot a \vec{u} \right]^m \end{aligned}$$

on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison :

$$\begin{aligned} \exp \left[j \left(\vec{k}_i - \vec{k}_d \right) \cdot a \vec{u} \right] &= \exp \left[-j \left(\vec{k}_i - \vec{k}_d \right) \cdot \overrightarrow{A_{j+1}A_j} \right] = \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i' - \sin i) \right] = \exp [-j\varphi] \\ \Rightarrow F_{interf} &= \sum_{m=1}^N \exp (-j\varphi)^m = \exp (-j\varphi) \frac{\exp (-jN\varphi) - 1}{\exp (-j\varphi) - 1} \\ \Rightarrow F_{interf} &= \exp (-j\varphi) \frac{\exp (-jN\frac{\varphi}{2}) [\exp (-jN\frac{\varphi}{2}) - \exp (jN\frac{\varphi}{2})]}{\exp (-j\frac{\varphi}{2}) [\exp (-j\frac{\varphi}{2}) - \exp (j\frac{\varphi}{2})]} \\ \Rightarrow F_{interf} &= \exp \left(-j \frac{N+1}{2} \varphi \right) \frac{[\exp (-jN\frac{\varphi}{2}) - \exp (jN\frac{\varphi}{2})]}{[\exp (-j\frac{\varphi}{2}) - \exp (j\frac{\varphi}{2})]} \\ \Rightarrow F_{interf} &= \exp \left(-j \frac{N+1}{2} \varphi \right) \frac{\sin (N\frac{\varphi}{2})}{\sin (\frac{\varphi}{2})} \end{aligned}$$

D'où l'intensité I que nous pouvons tracer en fonction de φ pour différentes valeurs de N (cf. § 1.1.4).

$$I = I_0 |F_{diff}|^2 |F_{interf}|^2 = I_0 \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \right)^2$$

avec $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i' - \sin i)$ et $u = \frac{\pi b (\sin i' - \sin i)}{\lambda}$

Exercice 2 : Réseau réel de diffraction à fentes larges. Cas d'un réseau à $N = 6$ fentes

Un réseau par transmission est constitué par N fentes parallèles, de même largeur ℓ , et dont l'équidistance des centres est a ($a > \ell$), percées dans un écran opaque. Ce réseau est éclairé en incidence normale par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

1) Déterminer, à une constante multiplicative près A_0 , l'amplitude complexe de l'onde diffractée par ce réseau dans la direction faisant l'angle θ avec la normale au plan du réseau.

2) a) En déduire la loi de répartition de l'intensité lumineuse diffractée dans la direction θ sous la forme

$$I(u) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\gamma u)}{N \sin(\gamma u)} \right]^2$$

On exprimera les paramètres u , γ et I_0 en fonction de θ et des données a , ℓ , λ , A_0 et N .

2) b) En déduire la loi $I_p(\theta)$ de répartition de l'intensité dans le cas du réseau parfait à N fentes infiniment fines. Tracer le graphe de l'intensité I_p en fonction de $\sin \theta$ dans l'intervalle $-2\lambda/a < \sin \theta < 2\lambda/a$.

3) On considère le réseau réel à $N = 6$ fentes parallèles identiques dont le pas a est égal au triple de leur largeur ℓ .

3) a) Tracer le graphe $I(u)$ de ce réseau dans l'intervalle $u \in [-2\pi, 2\pi]$. Déterminer notamment les intensités des maxima principaux dans cet intervalle ; combien observe-t-on de raies en pratique si seules les raies d'intensités supérieures à $I_0/10$ sont visibles ?

3) b) Calculer, en minutes et secondes d'arc, la largeur angulaire du maximum principal dans la direction $\theta = 0$; on donne $\lambda = 0,45 \mu\text{m}$; $\ell = 50 \mu\text{m}$.

3) c) Calculer l'intensité des maxima secondaires dans la région comprise entre les maxima principaux les plus voisins de la normale au réseau.