Compléments

Chapitre VI : Dynamique des écoulements de fluides visqueux et incompressibles

Contents

Compléments

Chapitre VI : Dynamique des écoulements de fluides visqueux et incompressibles

Objectifs :

- *Extension de l'équation d'Euler au fluide visqueux : équation de Navier - Stokes ;*
- *Etude de quelques écoulements classiques.*

1 Rappels

- Pour un écoulement unidirectionnel, tel que $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$, la force de surface tangentielle $\vec{F}$, appelée force de cisaillement, ou de viscosité, qu'exerce S_1 sur S_2 à travers une surface d'aire S normale à $\vec{e}_y$ est portée par $\vec{e}_x$.
La valeur algébrique de cette force est égale à :
$$F = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} S$$
Cette force $\vec{F}$ tend à accélérer les veines rapides, et à ralentir les veines lentes.
- La viscosité est un phénomène de diffusion de la quantité de mouvement.
- La distribution surfacique des forces de pression peut être remplacée par une distribution volumique :
$$\vec{f}_{vol} = -\overrightarrow{grad}\, p$$
- Dans un fluide incompressible, les forces de viscosité sont équivalentes à une force volumique :
$$\vec{f}_{\text{viscosité},vol} = \eta\, \vec{\Delta}\, \vec{v}$$

2 Equation de Navier-Stokes

2.1 Equation de Navier-Stokes

Rappel : Le mouvement d'un fluide non visqueux dans le champ de pesanteur est régi par l'équation d'Euler :
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\, P + \rho \vec{g}$$
Dans le cas d'un fluide visqueux incompressible il suffit d'ajouter la densité volumiques des forces de viscosité $\vec{f}_{\text{viscosité},vol} = \eta\, \vec{\Delta}\, \vec{v}$. On obtient alors l'équation de *Navier-Stokes* :
$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\, P + \rho \vec{g} + \eta\, \vec{\Delta}\, \vec{v} \qquad \underline{\textit{Equation de Navier-Stokes}}}$$

Il est possible d'écrire cette équation en faisant intervenir la *viscosité cinématique* $\nu = \eta/\rho$:
$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{D\vec{v}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\, P + \vec{g} + \nu\, \vec{\Delta}\, \vec{v} \\ \left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\, P + \vec{g} + \nu\, \vec{\Delta}\, \vec{v} \end{array}}$$

2.2 "Résolution" de l'équation de Navier - Stokes

L'équation de Navier-Stokes est une extension de l'équation d'Euler ; elle est donc tout aussi difficile à résoudre : elle est *non linéaire* et n'admet pas en général de solutions analytiques. Il existe deux cas particuliers où la résolution est plus facile (disparition du terme non linéaire $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$) :

- <u>*Cas d'un écoulement à faible nombre de Reynolds :*</u>
pour de tels écoulements les vitesses sont faibles et les forces visqueuses sont importantes
$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} \ll \nu\, \vec{\Delta}\, \vec{v} \Rightarrow \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\, P + \vec{g} + \nu\, \vec{\Delta}\, \vec{v} \quad \underline{\textit{Equation de Stokes}}$$

- *Cas d'un écoulement parallèle d'un fluide incompressible :*
  L'écoulement est plan donc $\vec{v} = v(x, y, z)\vec{e}_x$; le fluide est incompressible on a donc :
  $div\,\vec{v} = 0$ soit $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{v} = v(y, z)\vec{e}_x \Rightarrow \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \left(v_x \dfrac{\partial}{\partial x}\right)(v_x\,\vec{e}_x) = \vec{0}$.
  L'équation de Navier Stokes s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\,P + \vec{g} + \nu\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

2.3 Conditions aux limites

La nature des solutions dépend aussi des conditions aux limites. Les deux cas importants sont :

- sur une paroi, la vitesse du fluide est égale à celle de la paroi $\boxed{\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}}$;
- sur une surface séparant deux fluides il y a continuité des contraintes (forces par unité de surface) ; dans le cas particulier d'une surface libre (l'un des deux fluides est un gaz) et d'un écoulement tel que $\vec{v} = v(y, t)\vec{e}_x$ on a alors $\boxed{\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0}$ pour le liquide à l'interface (l'axe y est perpendiculaire à la surface libre).

2.4 Pression hydrostatique dans les écoulements horizontaux

Dans le cas des écoulements horizontaux, les forces de pesanteur ont un rôle mineur ; on masque alors les effets de ces forces en introduisant la *pression dynamique* P_{dyn} telle que :

$$\boxed{P = P_{st} + P_{dyn}}$$

P_{st} est la *pression hydrostatique* c'est à dire la pression qui règnerait dans le fluide avec la même géométrie s'il était immobile (P_{st} est telle que $\overrightarrow{grad}\,P_{st} = \rho\vec{g}$).
L'équation de Navier Stokes s'écrit alors :

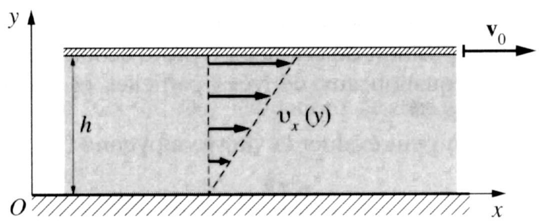
$$\boxed{\begin{aligned} \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\,P + \rho\vec{g} + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} &\Rightarrow \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\,P + \overrightarrow{grad}\,P_{st} + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} \\ &\Rightarrow \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \overrightarrow{grad}\,(P_{st} - P) + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} \\ &\Rightarrow \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\,P_{dyn} + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} \end{aligned}}$$

Remarque : la pression statique est définie à une constante additive près ; il en est donc de même pour la pression dynamique. L'existence d'une surface libre permet de lever cette indétermination.

3 Exemples

Dans les paragraphes 3.1. , 3.2. et 3.3. on note P la pression dynamique.

3.1 Flux de Couette



Soit deux plans parallèles et horizontaux d'équation $y = 0$ et $y = h$. On suppose que :
- le plan supérieur se déplace à la vitesse constante $\vec{v} = v_o\,\vec{e}_x$;
- la pression ne dépend pas de x : $P = P(y, z)$; on n'impose aucun gradient de pression suivant Ox ;

- l'écoulement est stationnaire.

La vitesse du fluide est donc de la forme $\vec{v} = v(y)\,\vec{e}_x$. D'après le paragraphe 2.4. l'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$-\overrightarrow{grad}\,P + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \vec{0}$$

En adoptant les coordonnées cartésiennes on obtient :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ et } -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ et } -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow P = cste \text{ et } v = ay + b$$

Les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes d'intégration a et b :

$$v(0) = 0 \text{ et } v(h) = v_o \Rightarrow \vec{v} = v_o\frac{y}{h}\,\vec{e}_x$$

Le flux de Couette correspond à une vitesse du fluide variant linéairement entre les deux plaques :

$$\vec{v} = v_o\frac{y}{h}\,\vec{e}_x$$

Remarques :
1) Dans cet écoulement l'équivalent volumique des forces de viscosité est nulle à l'état stationnaire mais la viscosité est tout de même responsable de la *mise en mouvement* du fluide.
2) Rappel : la grandeur notée P ci-dessus est la pression dynamique.
3) Le raisonnement est le même dans le cas où la vitesse du plan inférieur est constante mais non nulle.

3.2 Flux de Couette-Poiseuille

3.2.1 Champ de vitesse

On étudie le même système que précédement mais on impose un gradient de pression suivant l'axe Ox :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (-K) = cste \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P(l) - P(0)}{l} = -\frac{\Delta P}{l} \quad \text{avec } l \text{ longueur suivant } Ox$$

La projection de l'équation de Navier Stokes donne :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad -\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (-K) \Rightarrow v = \frac{(-K)}{2\eta}y^2 + by + c$$

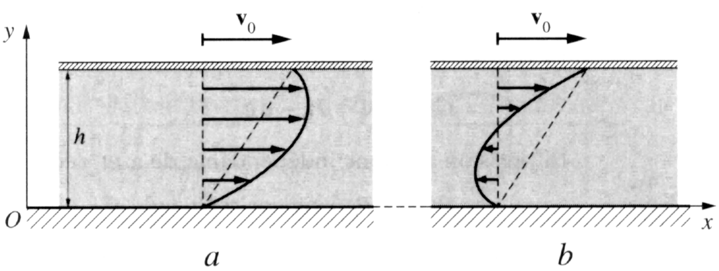
Les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes d'intégration b et c:

$$v(0) = 0 \text{ et } v(h) = v_o \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{(-K)}{2\eta}y^2 + \left(v_o - \frac{(-K)}{2\eta}h^2\right)\frac{y}{h}\right)\vec{e}_x$$

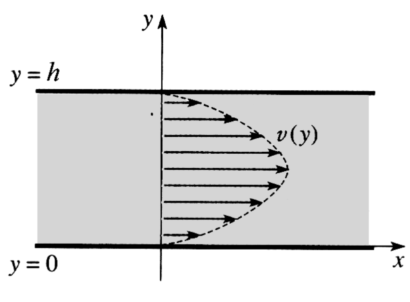
Le flux de Couette-Poiseuille correspond à un profil de vitesse parabolique entre les deux plaques

$$\vec{v} = \left(\frac{\left(-\frac{\Delta P}{l}\right)}{2\eta}y^2 + \left(v_o - \frac{\left(-\frac{\Delta P}{l}\right)}{2\eta}h^2\right)\frac{y}{h}\right)\vec{e}_x$$

Remarques :
1) Selon le signe du gradient de pression suivant Ox on obtient deux types d'écoulement ;
2) On peut envisager le cas où les deux plans sont immobiles :



Flux de Couette-Poiseuille. a) $\partial P/\partial x < 0$. b) $dP/\partial x > 0$.



cas où v_o est nulle

3.2.2 Débit

On se place dans le cas où les deux plans sont immobiles : écoulement dans une conduite de section constante.
Pour une largeur L suivant l'axe Oz on obtient le débit volumique par intégration :

$$\begin{aligned}
D_{volumique} &= \frac{1}{dt}\int_{y=0}^{y=h} (L\,v(y)\,dy\,dt) \\
&= L\int_{y=0}^{y=h} v(y)\,dy \\
&= L\int_{y=0}^{y=h} \left(\frac{(-K)}{2\eta}y^2 + \left(v_o - \frac{(-K)}{2\eta}h^2\right)\frac{y}{h}\right) dy \\
&= -\frac{1}{12}Lh\frac{(-K)\,h^2 - 6v_o\eta}{\eta} \\
&= -\frac{1}{12}Lh\frac{\left(\frac{-\Delta P}{l}\right)h^2 - 6v_o\eta}{\eta} \\
&= \frac{1}{12}Lh\frac{\Delta P h^2 + 6v_o\eta l}{l\eta} \\
&= \frac{1}{12}\frac{Lh^3}{l\eta}\Delta P \quad \text{car } v_o = 0
\end{aligned}$$

Le débit est donc proportionnel à la chute de pression.

3.3 Ecoulement de Poiseuille

3.3.1 Champ des vitesses

On étudie l'écoulement dans une conduite cylindrique, de longueur l, de section circulaire de rayon R, en régime laminaire permanent.
Soit Oz l'axe du cylindre. On adopte les coordonnées cylindriques (r, θ, z). Etant donnée la symétrie de révolution autour de Oz, les grandeurs physiques ne dépendent pas de θ.
La vitesse du fluide est donc de la forme $\vec{v} = v(r,z)\,\vec{e}_z$.
Le fluide est incompressible $\Rightarrow div\,\vec{v} = 0$ soit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{v} = v(r)\,\vec{e}_z$$

D'après le paragraphe 2.4. l'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$-\overrightarrow{grad}\,P + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \vec{0} \Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \qquad -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\,\Delta v = 0$$

Les deux premières relations donne une pression (dynamique) uniforme dans toute section droite du cylindre.
La troisième équation s'intègre facilement car $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ ne dépend que de z et $\eta\,\Delta v$ est uniquement fonction de r; ces deux termes sont donc constants :

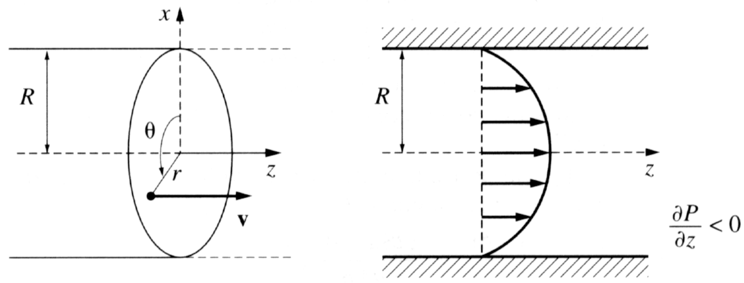
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -K \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{-K}{\eta} \quad \text{avec} \quad \Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$
$$\Rightarrow v(r) = -\frac{K}{\eta}\frac{r^2}{4} + a\ln r + b$$

on détermine a et b grâce aux conditions aux limites :

$$\lim_{r\to 0} v(r) \text{ n'est pas infini} \Rightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad v(R) = 0 \Rightarrow b = \frac{KR^2}{4\eta}$$

En <u>*régime laminaire permanent*</u>, le champ des vitesses de l'écoulement dans une conduite cylindrique, de longueur l, de section circulaire de rayon R, est :

$$\vec{v} = \frac{K}{4\eta}\left(R^2 - r^2\right)\vec{e}_z \quad \underline{\textit{Ecoulement de Poiseuille}}$$



Remarque : suivant le signe de K l'écoulement se fait dans un sens ou dans l'autre.

3.3.2 Débit

on procède comme au paragraphe 3.2.2.

$$\begin{aligned}
D_{volumique} &= \frac{1}{dt}\iint_{r,\theta}(v(r)rdrd\theta\,dt) = \iint_{r,\theta} v(r)rdrd\theta \\
&= 2\pi\int_{r=0}^{R} v(r)rdr = 2\pi\int_0^R \frac{K}{4\eta}\left(R^2 - r^2\right)rdr \\
&= \frac{1}{8}\pi R^4\frac{K}{\eta}
\end{aligned}$$

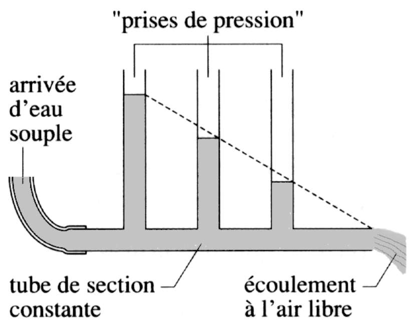
En *régime laminaire permanent*, le débit volumique d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique, de longueur l, de section circulaire de rayon R, est proportionnel à la différence de la pression dynamique entre ses sections d'entrée et de sortie (plus précisément au gradient de la pression) :

$$D_{volumique} = \frac{1}{8}\frac{\pi R^4}{\eta}\frac{\Delta P}{l} \qquad \textit{Loi de Poiseuille}$$

Remarques :
1) On appelle *perte de charge* la grandeur :

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{8\eta D_{volumique}}{\pi R^4 \rho} l$$

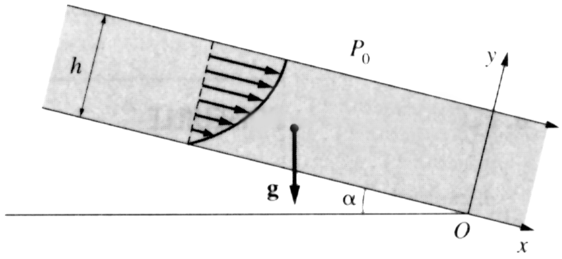
2) A débit volumique constant la perte de charge est proportionnel à la longueur l :



Les maxima de niveau dans les différents tubes verticaux sont alignés.

3.4 Plan incliné

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux sur un plan incliné, soumis aux seules forces de pesanteur. on note α l'angle du plan incliné avec le plan horizontal. La direction Ox est la ligne de plus grande pente et on choisit Oy perpendiculaire à Ox dans le plan vertical. On note h l'épaisseur de l'écoulement supposé uniforme et P_o la pression atmosphérique.



Dans ce problème il y a une surface libre, il faut donc distinguer la pression et la pression dynamique.

La vitesse du fluide est donc de la forme $\vec{v} = v(y)\,\vec{e}_x$.

D'après le paragraphe 2.2. l'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$-\overrightarrow{grad}\,P + \rho\vec{g} + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \vec{0}$$

En adoptant les coordonnées cartésiennes on obtient :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g\sin\alpha + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ et } -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g\cos\alpha = 0 \text{ et } -\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

La pression ne dépend donc pas de z (résultat prévisible): $P = P(x, y)$.

La deuxième équation donne :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g\cos\alpha \Rightarrow P(x,y) = -\rho g\cos\alpha\, y + f(x)$$

La condition aux limites donne :

$$\forall x\;\; P(x,h) = P_o \Rightarrow \forall x\;\; -\rho g\cos\alpha\, h + f(x) = P_o \text{ soit } \forall x\;\; f(x) = P_o + \rho g\cos\alpha\, h$$

La pression est donc de la forme :

$$P(x,y) = P_o + \rho g\cos\alpha\,(h-y)$$

La première équation devient :

$$\eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g\sin\alpha = -\rho g\sin\alpha \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{1}{\eta}\rho g\sin\alpha$$

$$\Rightarrow v(y) = -\frac{1}{2\eta}\rho g\sin\alpha\, y^2 + ay + b$$

Les conditions aux limites donnent :

$$v(0) = 0 \;\text{ et }\; \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(h) = 0 \Rightarrow b = 0 \;\text{ et }\; -\frac{1}{\eta}\rho g\sin\alpha\, h + a = 0 \;\text{ soit }\; a = \frac{1}{\eta}\rho g\sin\alpha\, h$$

Le champ des vitesses d'un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux sur un plan incliné d'angle α, soumis aux seules forces de pesanteur, a un profil parabolique avec une vitesse maximum au niveau de la surface libre :

$$\vec{v} = \frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}\,(2h-y)\,y\,\vec{e}_x$$

Remarque : en régime stationnaire les forces de viscosité sur un élément de fluide compensent exactement la composante selon Ox des forces de pesanteur.

4 Exercices

Exercice 1 : *Ecoulement dans un tube cylindrique*

Soit un tube cylindrique de 3 km de long, de 10 cm de diamètre, parcouru par un liquide de viscosité dynamique $\eta = 0,04$ Pl. On suppose que la distribution des vitesses dans la section droite du tube est donnée par l'équation parabolique $u = 10y - y^2$, u étant la vitesse (en cm/s) à la distance y (en cm) de la paroi. Calculer :

1) La force de frottement visqueux par unité de surface contre la paroi.
2) La force de frottement visqueux par unité de surface à 2 cm de la paroi.
3) La force totale de frottement s'exerçant sur le tube.

Exercice 2 *: Mesure de la viscosité cinématique*

Un liquide visqueux s'écoule lentement d'un récipient cylindrique de diamètre D dans un tube horizontal de diamètre d et de longueur L.

1) Pourquoi peut-on considérer cet écoulement comme quasi permanent ? En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction de h.

2) A partir de l'équation de conservation de la masse, établir une équation différentielle satisfaite par $h(t)$. La résoudre avec la condition $h(t_0) = h_0$.

3) Il a fallu une durée de 59 minutes pour que le niveau du liquide passe de la hauteur $h = 6\,\text{cm}$ à $h = 3\,\text{cm}$. Déterminer la viscosité cinématique du fluide. Données : $D = 4\,\text{cm}$, $L = 50\,\text{cm}$, $d = 1\,\text{mm}$ et $g = 9,8\,\text{m.s}^{-2}$.

Exercice 3 *: Puissance d'un pompe*

On transporte dans une conduite horizontale de $0,10\,\text{m}$ de diamètre et $10\,\text{km}$ de long, un débit volumique de $50\,\text{m}^3/\text{heure}$ d'une huile de masse volumique $\rho = 950\,\text{kg.m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $0,2\,\text{Pl}$.

1) Calculer le nombre de Reynolds de cet écoulement . Est-il laminaire ?

2) Calculer la chute de pression motrice du fluide dans cette conduite.

3) Quelle est la puissance de la pompe nécessaire pour ce transport ?

Exercice 4 *: Amortisseur hydraulique*

Un amortisseur hydraulique est constitué par un cylindre de rayon R dans lequel peut se déplacer un piston de longueur ℓ laissant un jeu radial a. Le cylindre contient une huile incompressible de viscosité η qui s'écoule par le jeu a.
Etablir une relation entre la vitesse V_0 du piston par rapport au cylindre, η, a, ℓ, R et la force F à laquelle il est soumis.

Application numérique : $R = 2\,\text{cm}$; $\ell = 2\,\text{cm}$; $a = 0,01\,\text{cm}$; $\eta = 0,01$ Pl ; $F = 10^4\,\text{N}$. Calculer V_0.

Exercice 5 *: Chute d'une bille*

Une bille d'acier de masse volumique $\mu' = 7,8\,\text{g.cm}^3$ et de diamètre $1\,\text{mm}$ tombe dans un liquide de masse volumique $\mu = 0,8\,\text{g.cm}^{-3}$ avec une vitesse limite de $2\,\text{cm.s}^{-1}$. Calculer la viscosité cinématique de cette huile et le nombre de Reynolds. Vérifier que la formule de Stokes est applicable. ($g = 9,8\,\text{m.s}^{-2}$).

Exercice 6 *: Écoulement de Poiseuille*

Un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique μ, s'écoule en régime stationnaire et incompressible dans une conduite cylindrique d'axe Oz, de longueur L et rayon R. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme :

$$\vec{v}(M) = v_z(r,z)\vec{u}_\theta \ , \ p(M) = p(r,z)$$

On donne pour un tel champ : $div\ \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, $\Delta\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u}_z$

1. On suppose que l'écoulement est incompressible. Montrer que $v_z(r,z)$ ne dépend pas de z.

2. On néglige la pesanteur. On rappelle l'équation de Navier-Stokes : $\mu\,\vec{a} = -\overrightarrow{grad}\,p + \eta\Delta\vec{v}$

2.a. Montrer que le champ des accélérations $\vec{a}(M)$ est nul.

2.b. Montrer que la pression p ne dépend pas de r.

2.c. Établir l'équation différentielle dont est solution $v_z(r)$ et montrer que dp/dz est une constante C. Expliciter C et $v_z(r)$ en exploitant les conditions aux limites sur la paroi de la conduite. On admettra que dv_z/dr est bornée.

3.a. En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction des pressions $p(z=0) = p_1$ à l'entrée et $p(z=L) = p_2$ à la sortie de la conduite.

3.b. Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique, introduire une résistance hydraulique $\mathcal{R}$ et l'exprimer en fonction de η, $\mathcal{R}$ et L. Comparer l'influence du rayon R sur la résistance électrique et sur la résistance hydraulique et commenter.

3.c. Calculer la chute de pression dans une artère de longueur $L = 1\,\text{m}$, de rayon $R = 0,5\,\text{cm}$, où le débit volumique vaut $D_v = 80\,\text{cm}^3.\text{s}^{-1}$, sachant que la viscosité du sang vaut $\eta = 4.10^{-3}$ Pl. Commenter sachant que le coeur maintient une différence pression Δp qui, symbolisée par "12-8" en médecine, vaut $\Delta p = 12 - 4 = 8\,\text{cm}$ de mercure ; on rappelle que $1\,\text{bar} = 760\,\text{mm}$ de mercure.

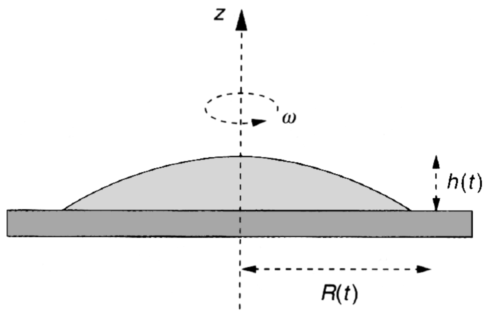
Exercice 7 *: Au jardin d'acclimatation*

Au jardin d'acclimatation, on propose aux enfants une attraction où ils font de la peinture artistique automatique : une feuille de papier de rayon $R = 10\,\text{cm}$ est fixée sur un plateau tournant à vitesse angulaire $\omega = 10^3\,\text{rad.s}^{-1}$ constante autour d'un axe vertical fixe Oz ; l'enfant envoie une goutte de peinture, de masse volumique μ, de viscosité η et de viscosité cinématique $\nu \approx 10^{-4}\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ verticalement sur la feuille et la goutte s'étale en un film mince d'épaisseur $h < 0,1\,\text{mm}$; la durée typique de l'étalement est $\tau = 100\,\text{s}$. Puis il recommence avec plusieurs couleurs en plaçant la goutte différemment.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'étalement de la goutte à l'aide d'une «procédure» semi-quantitative décrite par Pierre-Gilles de Gennes dans un article de Pour la Science (mai 1984).

On adopte le modèle suivant : la goutte a été déposée au centre O et forme à l'instant t un film de rayon $R(t)$ et d'épaisseur maximale $h(t)$ avec $h(t) \ll R(t)$. Son volume reste constant ce qui donne «en ordre de grandeur» la relation

$$h\,(t)\,R^2\,(t) = h_0 R_0^2 \qquad (1)$$



L'épaisseur $h(t)$ de la goutte de peinture est exagérée

Dans le référentiel tournant, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\,p + \mu\vec{g} + \eta\Delta\vec{v} - 2\mu\vec{\omega}\wedge\vec{v} + \mu\omega^2\overrightarrow{OM} \qquad (2)$$

De plus la goutte étant assez plate et de faible épaisseur, on suppose le champ de pression uniforme.

1. Indiquer la signification des différents termes de l'équation (2). En évaluant des nombres sans dimension, montrer que tous les autres termes contenant la vitesse sont négligeables devant le terme de viscosité.

2. Exprimer «en ordre de grandeur» la puissance résistante $\mathcal{P}_r$ due aux forces de viscosité en fonction de μ, ω, $R(t)$, $h(t)$ et $\dot{R}(t)$.

3. Exprimer de même «en ordre de grandeur» la puissance motrice $\mathcal{P}_m$ en fonction de μ, ω, $R(t)$, $h(t)$ et $\dot{R}(t)$.

4. En déduire qu'en ordre de grandeur on a :

$$R^3\frac{dR}{dt} \approx \frac{\omega^2 R_0^4 h_0^2}{\nu}$$

et expliciter $R(t)$. Évaluer la durée τ pour qu'une goutte de volume initial $V_0 = 10^{-8}\,\mathrm{m}^3$ s'étale jusqu'en $R_M = 10\,\mathrm{cm}$.