Induction électromagnétique

Chapitre IV : Inductance propre, inductance mutuelle. Energie électromagnétique

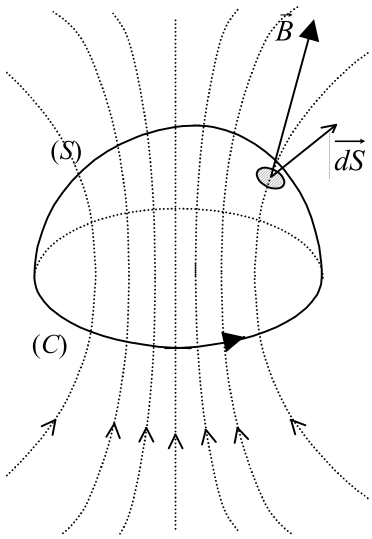
Objectifs:

- *Coefficients d'inductance propre L et mutuelle M*
- *Bilan énergétique*

1. Inductance propre

1.1. Définition, notations

Un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité i crée un champ magnétique $\vec{B}$ que l'on qualifie de **propre**, par opposition au champ extérieur dont il n'est pas responsable mais dans lequel il peut-être plongé.
Le flux ϕ de ce champ propre à travers le circuit qui l'a créé est appelé le **flux propre**.



Comme $\vec{B}$ et donc ϕ sont proportionnels à i (loi de Biot Savart), le rapport ϕ/i ne dépend plus du courant qui parcourt le circuit et constitue donc une caractéristique intrinsèque de celui-ci ; on l'appelle l'inductance propre :

$$\boxed{L = \frac{\phi_{propre}}{i} = \frac{\iint_S \vec{B}.d\vec{S}}{i}}$$

Les unités du Système d'Unité Internationales sont : $\begin{cases} L : \text{ Henry, symbole H} \\ \phi : \text{ Weber, symbole Wb } (1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{T.\,m^2}) \end{cases}$

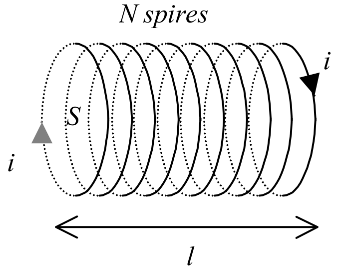
<u>*Remarques :*</u>

1) L'inductance propre L est une grandeur *toujours positive.*

2) L'inductance propre L dépend de la géométrie du circuit et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel il est plongé.

3) Il n'est pas nécessaire qu'un circuit soit parcouru *réellement* par un courant pour calculer son inductance propre, il suffit d'imaginer l'existence d'un courant i quelconque et calculer le flux propre correspondant.

1.2. Exemple

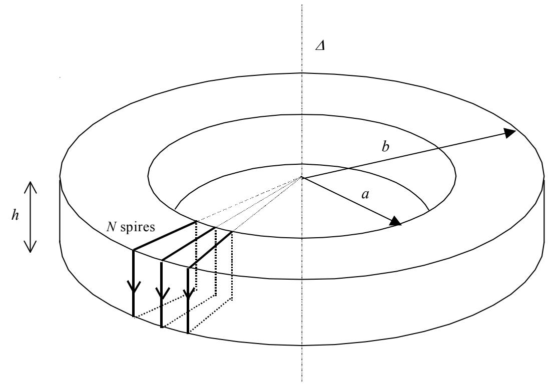


On considère un solénoïde de longueur ℓ comportant N spires régulières, supposées jointives, de section S.

- Le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde (champ propre) est
$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_z$$
avec $\vec{e}_z$ vecteur unitaire de l'axe du solenoïde ;
- Le flux propre ϕ_{propre} est alors
$$\phi_{propre} = N\phi_0 = N\,(BS) = \mu_0 N^2 \frac{S}{\ell} i$$
- L'inductance propre L du solénoïde est alors :

$$L = \frac{\phi_{propre}}{i} = \frac{\mu_0 N^2 \frac{S}{\ell} i}{i} = \mu_0 N^2 \frac{S}{\ell}$$

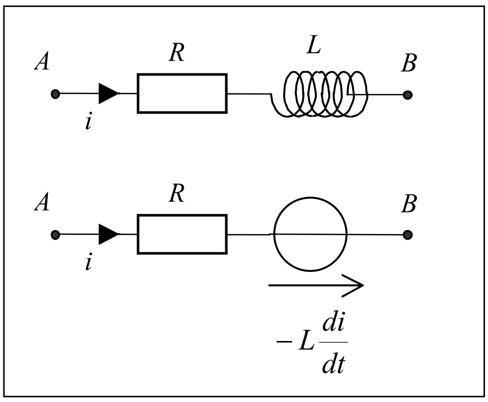
<u>*Exercice n° 01*</u> *:* Inductance propre d'un tore



On considère un tore (de rayons interne a et externe b) de section rectangulaire (hauteur h) comportant N spires. Déterminer l'inductance propre L du tore.

1.3. Loi d'Ohm aux bornes d'une portion de circuit présentant une inductance propre

La loi d'Ohm généralisée s'écrit
$$u_{AB} = R i_{AB} - e_{AB_{ext}} - e_{AB_{propre}}$$
La f.e.m. d'auto induction $e_{AB_{propre}}$ est donnée par la loi de Faraday : $e_{AB_{propre}} = -\frac{d\phi_{propre}}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt}$
Si le circuit ne se déforme pas (bobine rigide) et si le milieu magnétique dans lequel il est plongé est linéaire (μ_r constante, cette restriction exclue les matériaux dits *ferromagnétiques*), alors son inductance propre ne dépend pas du temps et :
$$e_{AB_{propre}} = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow u_{AB} = R i_{AB} - e_{AB_{ext}} + L\frac{di}{dt}$$
Dans le cas où il n'y a pas de phénomène d'induction "externe" (le champ magnétique externe est nulle : $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$) on obtient:
$$\boxed{u_{AB} = R i_{AB} + L\frac{di}{dt}}$$



1.4. Energie magnétique

On étudie la réponse d'un solénoïde (longueur ℓ comportant N spires de section S) de résistance R et d'inductance L à un échelon de tension. Pour cela on l'alimente par un générateur parfait délivrant une tension u. On suppose qu'il n'y a pas de champ magnétique externe et que l'inductance propre L est constante ; on a donc

$$\begin{aligned} u &= Ri + L\frac{di}{dt} \quad \text{avec} \quad u(t) = \begin{cases} 0 \ \forall t < 0 \\ E = cste \ \forall t > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \ i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

Pour faire un bilan énergétique on multiplie l'équation différentielle par idt

$$\begin{aligned} u\,(idt) &= Ri\,(idt) + L\frac{di}{dt}\,(idt) \\ &\Rightarrow \ uidt = Ri^2dt + Lidi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_0^t Eidt}_{\substack{\text{énergie délivrée} \\ \text{par le générateur}}} = \underbrace{\int_0^t Ri^2dt}_{\substack{\text{énergie dissipée} \\ \text{par effet Joule}}} + \underbrace{\int_0^t Lidi}_{\substack{\text{énergie emmagasinée} \\ \text{par la bobine}}}$$

Entre 0 et t_1 le solénoïde accumule une **énergie magnétique** W_B avec

$$W_B = \int_{t=0}^{t=t_1} Lydy = \int_{y=0}^{y=i} Lydy = \frac{1}{2}Li^2$$

Il reste à relier cette énergie à la densité volumique d'énergie électromagnétique $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$.

- Le champ propre du solénoïde (considéré comme idéal) est :
  - nul à l'extérieur
  - égale à $\mu_0 \frac{N}{\ell} i$ à l'intérieur
- l'énergie magnétique emmagasinée est donc

$$w_B.V = \frac{B^2}{2\mu_0}S\ell = \frac{\left(\mu_0 \frac{N}{\ell} i\right)^2}{2\mu_0}S\ell = \frac{1}{2}\mu_0\frac{N^2S}{\ell}i^2$$

- l'inductance propre du solénoïde est $L = \mu_0 N^2 \frac{S}{\ell}$

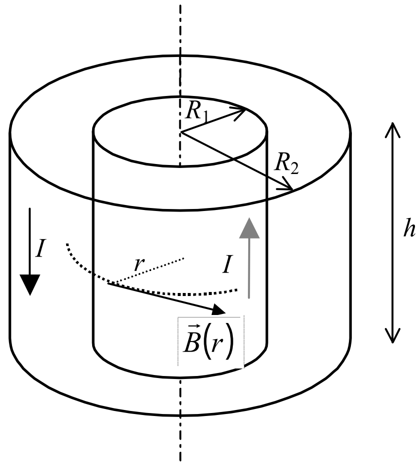
  On a bien $w_B.V = \frac{1}{2}Li^2 = W_B$

Le courant i qui parcourt un circuit, d'inductance propre L, crée un champ magnétique propre $\vec{B}_{propre}$ auquel est associé une énergie magnétique propre W_B donnée par

$$\boxed{W_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}i\,\phi_{propre} = \frac{1}{2}\iiint_{espace} \frac{B^2_{propre}}{\mu_0}d\tau}$$

<u>*Remarque :*</u> Cette dernière expression permet d'obtenir l'inductance propre de circuits non filiformes pour lesquels, la relation de définition $L = \frac{\phi_{propre}}{i} = \frac{\iint_S \vec{B}.d\vec{S}}{i}$ est inapplicable faute de pouvoir calculer le flux propre.

<u>*Exercice n° 02*</u> *:* câble coaxial



Soit un câble constitué de deux cylindres coaxiaux et supposé de longueur infinie. On suppose que le courant circule en périphérie du conducteur central (âme du coaxial), le retour étant assuré par le conducteur externe. Les densités de courants surfaciques sont uniformes.

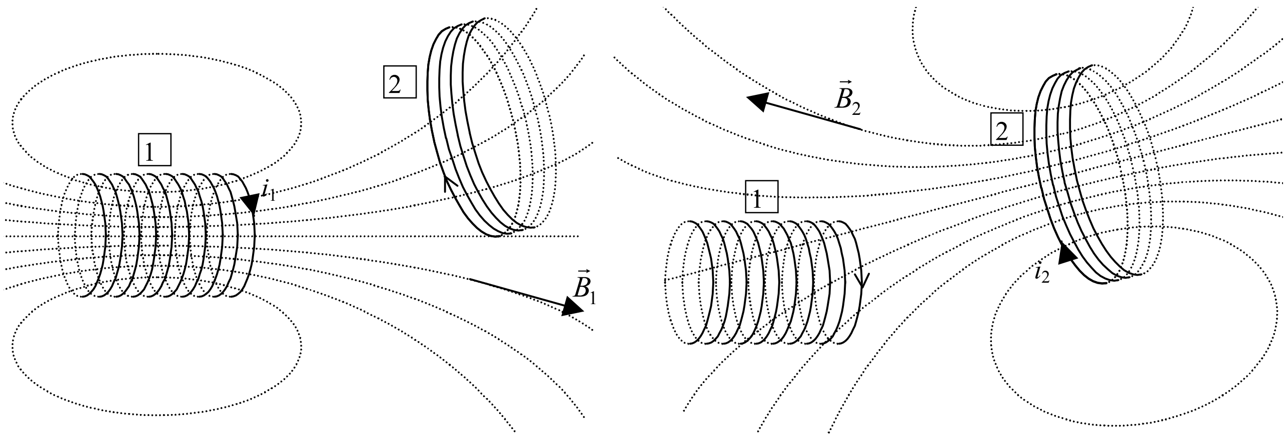
Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$. En déduire w_B et W_B. Montrer alors que $L = \frac{\mu_0 h}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

2. Inductance mutuelle

2.1. Flux de mutuelle inductance

Soient deux circuits orientés repérés par (1) et (2) tels que :

- quand le circuit (1) est parcouru par une intensité de courant i_1, le circuit (2) embrasse une partie (ou la totalité) du champ magnétique $\vec{B}_1$ crée par (1),
- quand le circuit (2) est parcouru par une intensité de courant i_2, le circuit (1) embrasse une partie (ou la totalité) du champ magnétique $\vec{B}_2$ crée par (2).



On désigne par :

$\phi_{1\to 2}$ le flux du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers le circuit (2) : $\boxed{\phi_{1\to 2} = \iint_{(2)} \vec{B}_1.d\vec{S}}$

$\phi_{2\to 1}$ le flux du champ magnétique $\vec{B}_2$ à travers le circuit (1) : $\boxed{\phi_{2\to 1} = \iint_{(1)} \vec{B}_2.d\vec{S}}$

Ces flux sont appelés les **flux de mutuelle inductance.**

2.2. Expression de l'inductance mutuelle

Les champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ étant respectivement proportionnels aux courants i_1 et i_2, les flux de mutuelle inductance peuvent s'écrire :

$$\phi_{1\to 2} = M_{12} i_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2\to 1} = M_{21} i_2$$

Nous admettrons que les deux coefficients M_{12} et M_{21} sont égaux et désignerons par **inductance mutuelle** M leur valeur commune :

$$\boxed{M = \frac{\phi_{1\to2}}{i_1} = \frac{\phi_{2\to1}}{i_2}}$$

La dimension d'une inductance mutuelle est celle d'une inductance propre et M se mesure donc en Henry.

Remarques :

1) Comme l'inductance propre L, l'inductance mutuelle M dépend de la géométrie des deux circuits et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel ils sont plongés.

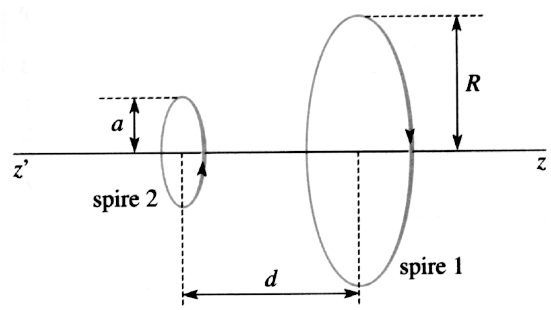
2) Contrairement à l'inductance propre L toujours positive, **l'inductance mutuelle M est une grandeur algébrique** dont le signe dépend de l'orientation des deux circuits. Si l'on inverse l'orientation d'un des deux circuits l'inductance mutuelle M est changée en son opposé.

3) Nul besoin que les circuits soient parcourus *réellement* par des courants pour calculer leur inductance mutuelle, il suffit d'imaginer l'existence d'un courant i quelconque (i_1 ou i_2) et calculer le flux de mutuelle correspondant.

4) En général l'inductance mutuelle de deux circuits n'a de valeur notable que lorsqu'il s'agit de parties bobinées voisines.

Exercice n° 03 : Inductance mutuelle entre deux spires

Soit deux spires, l'une de rayon R et d'axe (Oz), et une seconde spire de même axe et de rayon a très petit par rapport à R. Ces deux spires sont à une distance d l'une de l'autre.
Calculer les coefficients M_{12} et M_{21}, puis montrer que $M = M_{12} = M_{21}$. On prendra les orientations choisies sur le schéma ci-dessous.



2.3. Couplage magnétique entre deux circuits

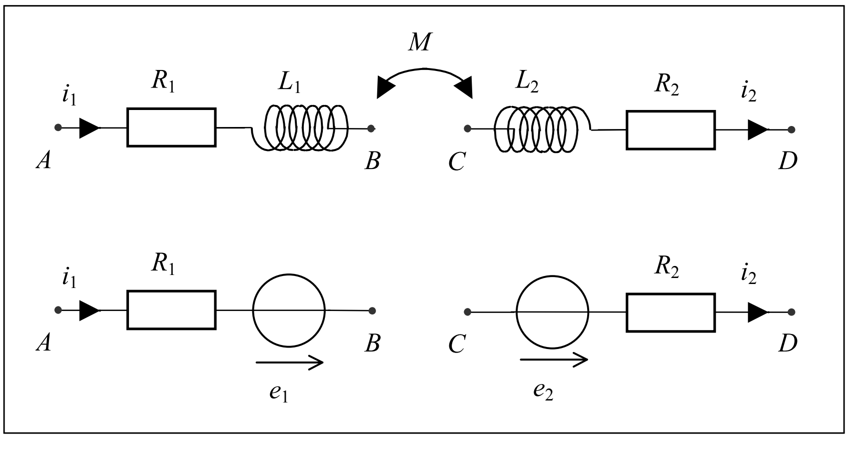
2.3.1. Loi d'Ohm aux bornes d'une portion de circuit présentant une inductance propre et une inductance mutuelle

Si deux circuits sont en inductance mutuelle et en supposant qu'il n'y a **pas d'autre source de champ magnétique**, les flux totaux à travers chacune des deux bobines s'écrivent :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \phi_{1\to1} + \phi_{2\to1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 &= \phi_{2\to2} + \phi_{1\to2} = L_2 i_2 + M i_1\end{aligned}$$

D'où les f.e.m. induites :

$$\boxed{\begin{aligned}e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}\end{aligned}}$$



On en déduit les différences de potentiel aux bornes de chacun des deux circuits :

$$\begin{aligned} u_{AB} &= v_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_{CD} &= v_2 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Les équations électriques de chacune des deux branches sont *couplées* par inductance mutuelle.
En régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω ces équations deviennent (cf cours sur les transformateurs) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{v_1} = R_1 \underline{i_1} + j\omega L_1 \underline{i_1} + j\omega M \underline{i_2} \\ \underline{v_2} = R_2 \underline{i_2} + j\omega L_2 \underline{i_2} + j\omega M \underline{i_1} \end{array}}$$

2.3.2. Coefficient de couplage entre deux circuits

Lorsque chaque circuit enlace la totalité des lignes de champ de l'autre (exemple des deux solénoïdes emboîtés l'un dans l'autre lorsqu'ils ont le même rayon), la mutuelle inductance de deux circuits donnés prend alors sa valeur maximale qui est :

$$M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Quand une partie des lignes de champ correspondant à un circuit n'est pas enlacée par l'autre, alors :

$$M < \sqrt{L_1 L_2}$$

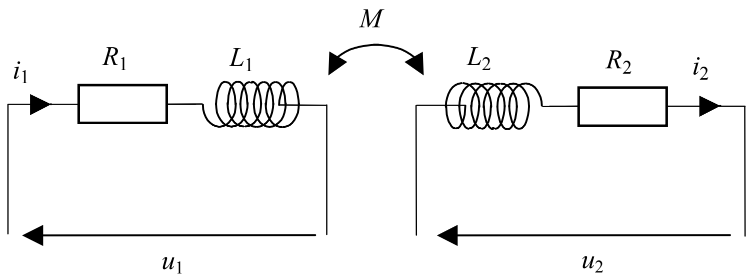
On définit le **coefficient de couplage** (magnétique) de deux circuits par la **quantité sans dimension** :

$$\boxed{0 \leq k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1}$$

2.4. Energie magnétique

2.4.1. Expression de l'énergie magnétique

Soient deux circuits en inductance mutuelle. On suppose qu'il n'y a **pas d'autre source de champ magnétique**. Recherchons l'énergie stockée sous forme magnétique quand l'intensité du courant vaut i_1 dans le circuit (1) et i_2 dans le circuit (2):



On procède comme au paragraphe 1.4. ; un bilan d'énergie appliqué au système $\{L_1, R_1; L_2, R_2\}$ donne :

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{array} \right. \\ \Rightarrow &\left\{ \begin{array}{l} v_1 (i_1 dt) = R_1 i_1 (i_1 dt) + L_1 \frac{di_1}{dt} (i_1 dt) + M \frac{di_2}{dt} (i_1 dt) \\ v_2 (i_2 dt) = R_2 i_2 (i_2 dt) + L_2 \frac{di_2}{dt} (i_2 dt) + M \frac{di_1}{dt} (i_2 dt) \end{array} \right. \\ \Rightarrow &\left\{ \begin{array}{l} v_1 i_1 dt - R_1 i_1^2 dt = L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 \\ v_2 i_2 dt - R_2 i_2^2 dt = L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

d'où une énergie magnétique élémentaire

$$\begin{aligned} dW_B &= dW_{B_{circuit\,1}} + dW_{B_{circuit\,2}} \\ &= \left(v_1 i_1 dt - R_1 i_1^2 dt\right) + \left(v_2 i_2 dt - R_2 i_2^2 dt\right) \\ &= (L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2) + (L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1) \\ &= L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M d(i_1 i_2) \end{aligned}$$

L'énergie magnétique d'un système de deux circuits couplés est, en l'absence d'autres sources de champ magnétique :

$$\boxed{W_B = \tfrac{1}{2}L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$$

Remarque : en désignant par Φ_1 et Φ_2 les flux totaux on a :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \phi_{1\to1} + \phi_{2\to1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 &= \phi_{2\to2} + \phi_{1\to2} = L_2 i_2 + M i_1\end{aligned}$$

$$\boxed{W_B = \tfrac{1}{2}\left(i_1\Phi_1 + i_2\Phi_2\right)}$$

2.4.2. Coefficient de couplage

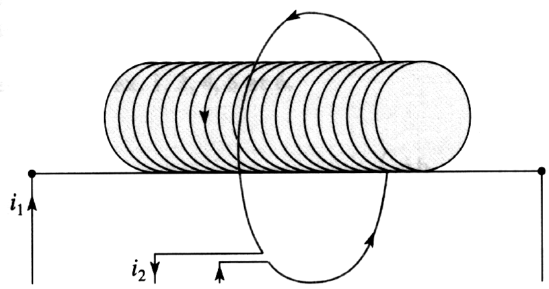
Revenons sur le coefficient de couplage introduit au § 2.3.2. en remarquant que l'encadrement annoncé pour la mutuelle inductance, $0 \leq k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$, peut être relié au fait que l'énergie magnétique stockée est une forme quadratique positive. En effet, en factorisant i_2^2 dans l'expression de l'énergie et en posant $X = \frac{i_1}{i_2}$:

$$W_B = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = \frac{1}{2}i_2^2\left[L_1 X^2 + 2MX + L_2\right]$$

$$\begin{aligned}\forall X \;\; W_B &> 0 \Rightarrow \forall X \;\; L_1 X^2 + 2MX + L_2 > 0 \\ &\Rightarrow \Delta = \left\{\text{discriminant de } L_1 X^2 + 2MX + L_2\right\} < 0 \\ &\Rightarrow \Delta' = M^2 - L_1 L_2 < 0\end{aligned}$$

$$\text{soit } \; |M| < \sqrt{L_1 L_2}$$

<u>*Exercice n° 04*</u> : Couplage entre un solénoïde et une bobine



Une bobine de N_2 spires enlace un solénoïde idéal de N_1 spires, de longueur ℓ et de section S.

1) Calculer l'inductance mutuelle M de ces deux circuits, avec les orientations du schéma ci-dessus.

2) La bobine de résistance R est fermée sur elle-même. Le solénoïde est parcouru par le courant $i_1 = i_0 \cos \omega t$. On suppose de plus que $N_2 \ll N_1$. Montrer que l'inductance L_2 est négligeable et déterminer le courant i_2 dans la bobine.

3) Proposer une méthode simple, utilisant un générateur B.F. et un oscilloscope pour mesurer M.

<u>*Exercice n° 05*</u> : Energie magnétique et inductance mutuelle de deux solénoïdes coaxiaux

Le solénoide S_1 de longueur ℓ_1 pénètre dans le solénoide S_2 coaxial de longueur ℓ_2 d'une quantité variable x ($x < \ell_1$). Les solénoides, ayant N_1 spires et N_2 spires régulièrement réparties sur une couche, sont parcourus par les courants I_1 et I_2 continus. Les rayons de S_1 et S_2 sont $R_1 \ll \ell_1$ et $R_2 \ll \ell_2$.

Déterminer, pour ce système de deux solénoides :

1) l'énergie magnétique $W(x)$;

2) l'inductance mutuelle $M(x)$ et vérifier l'inéquation $M(x) < \sqrt{L_1 L_2}$;

3) la force électromagnétique d'interaction de S_1 et S_2.