Commande d'un système

Chapitre VI : Applications de la rétroaction

Objectif :

- *Comment utiliser un système commandé pour générer un signal sinusoïdal.*
- *Etude des comparateurs.*

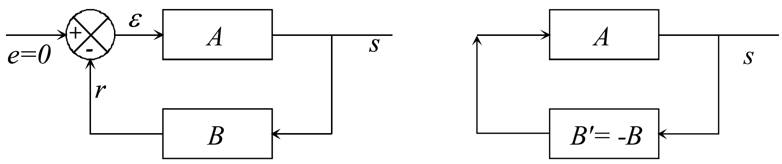
1. Génération d'un signal quasisinusoïdal

1.1. Principe d'un oscillateur à boucle de réaction

1.1.1. Structure

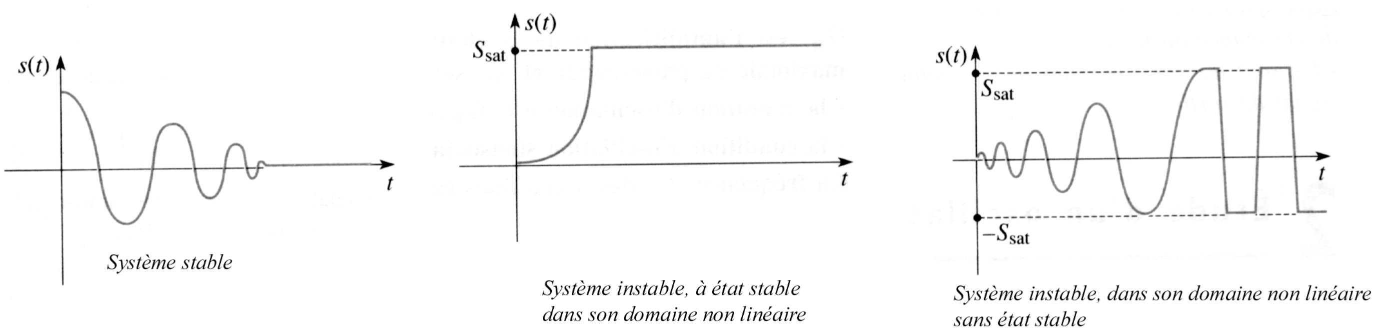
Il s'agit d'un système bouclé qui génère un signal sinusoïdal en l'absence de signal d'entrée :

- **la chaîne directe** est constituée par un amplificateur (A),
- **la chaîne de retour** est un filtre obtenu avec un quadripôle passif (B).



1.1.2. Conditions d'oscillations

- **D'un point de vue théorique**, le système sera le siège d'oscillations sinusoïdales à la fréquence f_0 si l'ensemble {chaîne directe + chaîne de retour + comparateur} a une fonction de transfert $\underline{H}_{ens}(p) = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$ telle que $|\underline{H}_{ens}(j2\pi f_0)| = 1$ et $Arg(\underline{H}_{ens}(j2\pi f_0)) = 2k\pi$ avec k entier. En effet dans de telles conditions, si le signal est présent il pourra se maintenir dans le circuit. Mais il reste tout de même le problème de l'apparition de ce signal. De plus la réalisation expérimentale *exacte* des conditions précédentes est difficile.
- Pour modéliser l'apparition du signal il faut considérer qu'à un instant donné **il apparaît une microtension dans le circuit**. En procédent comme dans le chapitre précédent (Ch I : Systèmes linéaires asservis § 3.1.2.: Immunité aux perturbations) on ajoute une perturbation dans le cicuit à un instant donné ; on a alors :
  - pour un **système stable**, le régime libre tend vers zéro et **les effets de la perturbation disparaissent**.
  - pour un **système instable** il y a alors deux cas possibles :
    - ∗ le système évolue vers un **état stable dans son domaine non linéaire** (saturation permanente sans oscillation),
    - ∗ le système évolue vers son **domaine non linéaire sans état stable** (le système oscille).
- Nous savons que le système est **instable** s'il existe au moins une racine de l'équation caractéristique $\sum_{k=0}^{m} b_k.r^k = 0$ à **partie réelle positive** (on obtient l'équation caractéristique en annulant le dénominateur de la fonction de transfert : $1 - A(p)B'(p) = 0$). Pour un tel système, on se trouve dans le cas "état stable dans son domaine non linéaire" si la valeur de saturation S_{sat} est telle que $\begin{cases} A(0) \times B'(0) \times S_{sat} \geq S_{sat} & \text{si} \quad S_{sat} > 0 \\ A(0) \times B'(0) \times S_{sat} \leq S_{sat} & \text{si} \quad S_{sat} < 0 \end{cases}$ (le signal S_{sat} est permanent).



Réponse d'un système à une perturbation

Conclusion :

Un circuit bouclé fonctionne en oscillateur si :

- **il existe au moins une racine de $A(p) \times B'(p) = 1$ à partie réelle positive,**
- **le "gain de boucle" en régime permanent est tel que $A(0) \times B'(0) < 1$.**

1.1.3. Condition nécessaire d'oscillations sinusoïdales

On se place dans le cas particulier où la chaîne d'action est telle que $A(p) = A_0 = cste$ et la chaîne de retour est un filtre passe-bande du second ordre avec

$$B(p) = \frac{B_{\max}}{1 + Q(\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p})} \Rightarrow B'(p) = \frac{-B_{\max}}{1 + Q(\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p})}$$

- la première condition pour obtenir des oscillations s'écrit "il existe au moins une racine de $A(p) \times B'(p) = 1$ à partie réelle positive" soit "il existe au moins une racine de $A_0 \times \frac{-B_{\max}}{1+Q(\frac{p}{\omega_o}+\frac{\omega_o}{p})} = 1$ (E) à partie réelle positive"

$$\begin{aligned}(E) &\Rightarrow -A_o \times B_{\max} = 1 + Q\left(\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p}\right)\\ &\Rightarrow \left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2 + \frac{1 + A_o \times B_{\max}}{Q}\left(\frac{p}{\omega_o}\right) + 1 = 0\end{aligned}$$

  cette condition est donc vérifiée si $\frac{1+A_o \times B_{\max}}{Q} < 0$ soit $A_o \times B_{\max} < (-1)$;

- la deuxième condition $A(0) \times B'(0) < 1$ est vérifiée car $A(0) \times B'(0) = A_0 \times 0 = 0 < 1$;
- si l'on veut des oscillations sinusoïdales la solution de l'équation $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ doit être une fonction pratiquement sinusoïdale. Après disparition de la perturbation $E(p)$:

$$\begin{aligned}E(p) = 0 \ &\Rightarrow \frac{S(p)}{H(p)} = 0\\ &\Rightarrow \frac{S(p)}{\left(\frac{A}{1-A.B'}\right)} = 0\\ &\Rightarrow (1 - A_o.B').S(p) = 0\\ &\Rightarrow \left(1 + A_o.\frac{B_{\max}}{1 + Q(\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p})}\right).S(p) = 0\\ &\Rightarrow \left(\left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2 + \left(\frac{1 + A_o.B_{\max}}{Q.\omega_o}\right).\frac{p}{\omega_o} + 1\right).S(p) = 0\\ &\Rightarrow \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) + \omega_o\left(\frac{1 + A_o.B_{\max}}{Q}\right).\left(\frac{ds}{dt}\right) + \omega_o^2.s = 0\end{aligned}$$

  les solutions de cette équation seront pratiquement sinusoïdales si les parties réelles des solutions de l'équation caractéristique sont proches de zéro, c'est à dire $\frac{1+A_o.B_{\max}}{Q} \to 0$ tout en restant négatif pour assurer l'instabilité.
  Cette condition est réalisée si $A_o \times B_{\max} \to (-1)^-$ et $Q \gg 1$.
  On peut retrouver ce résultat en remarquant que $A_o \times B_{\max} \to (-1)$ correspond au cas ou l'équation du second ordre vérifiée par le signal de sortie est celle d'un oscillateur harmonique. L'inégalité $A_o \times B_{\max} < (-1)$ donne un régime divergent.

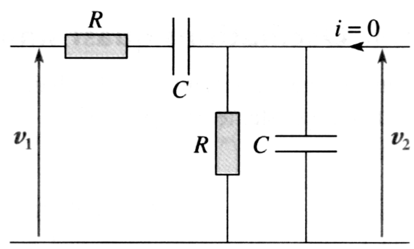
Conclusion :

En notant A_o l'amplification de la chaîne directe, $B_{\max}$ l'amplification maximale du filtre passe-bande et Q son facteur de qualité alors :

- **la condition d'oscillation est $A_o \times B_{\max} < (-1)$;**
- **la condition d'oscillation sinusoïdale est $A_o \times B_{\max} < (-1)$ et $Q \gg 1$ (avec $A_o \times B_{\max} \to (-1)^-$ si Q n'est pas suffisament élevé) ;**
- **la fréquence f_o des oscillations est celle de résonance du filtre.**

1.2. Exemple de l'oscillateur à pont de Wien

1.2.1. Filtre de Wien

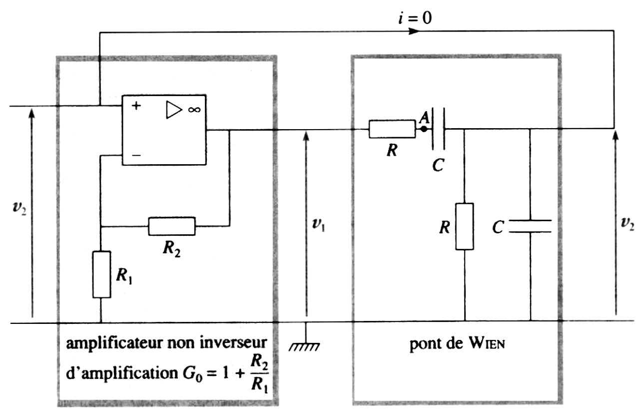


On considère le circuit ci-dessus (pont de Wien). La fonction de transfert est donnée par (pont diviseur de tension) :

$$B(p) = \frac{Z_{RC//}}{Z_{RC//} + Z_{RCs\acute{e}rie}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}\left(RCp + \frac{1}{RCp}\right)}$$

Il s'agit bien d'un filtre passe-bande. Son facteur de qualité est $Q = \frac{1}{3}$. Sa fréquence de résonnance est $f_o = \frac{1}{2\pi RC}$ et son amplifiation maximale est $B_{\max} = \frac{1}{3}$.

1.2.2. Oscillateur à pont de Wien

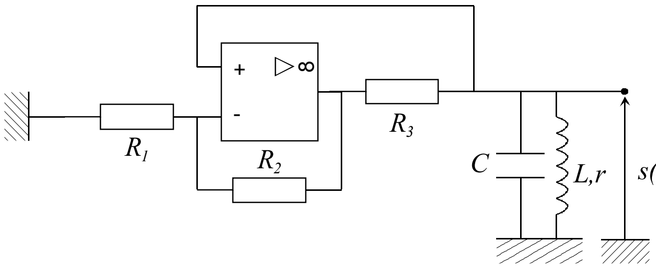


- **Identification de la chaîne directe et de la chaîne de retour :**
  l'amplificateur non inverseur joue le rôle de chaîne directe avec une amplification $A_o = \frac{R_1+R_2}{R_1} = cste$ alors que le pont de Wien joue le rôle de chaîne de retour avec $B'(p) = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}\left(RCp+\frac{1}{RCp}\right)} \Rightarrow B(p) = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{3}\left(RCp+\frac{1}{RCp}\right)} \Rightarrow B_{\max} = -1/3$.
- **Condition nécessaire d'oscillations sinusoïdales :**
  le facteur de qualité n'étant pas très élevé ($Q = 1/3$) il faut donc $A_o \times B_{\max} \to (-1)^-$ c'est à dire $\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\left(\frac{-1}{3}\right) \to (-1)^-$ et donc $\frac{R_1+R_2}{R_1} \to 3^+$..
  On choisira donc les résistances de manière à avoir $R_2 \approx 2R_1$. Pour qu'il y ait effectivement apparition des oscillations (obtention d'un régime libre légèrement divergent) on prendra $A_o \gtrapprox 3$ donc $R_2 \gtrapprox 2R_1$. Dans de telle condition, l'oscillation est amorcée à la moindre perturbation, et croit jusqu'à une légère saturation de l'amplificateur ; cette oscillation est quasi-sinusoïdale.

Remarque : On peut remplacer le pont de Wien par un filtre beaucoup plus sélectif (circuit bouchon RLC par exemple).

Exercice n° 01 :
Retrouver les résultats précédents en étudiant l'équation différentielle vérifiée par la tension de sortie.

Exercice n° 02 :
On considère le montage ci-dessous où l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire.

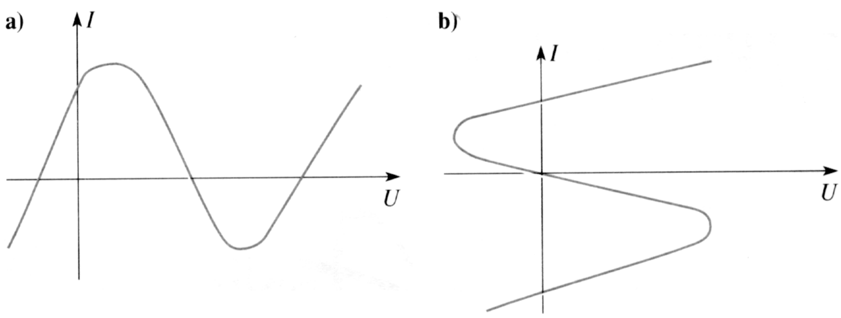


1) Etablir l'équation différentielle du $2^{ème}$ ordre à laquelle obéit la tension de sortie $s(t)$.
2) A quelle condition la tension de sortie $s(t)$ est-elle une grandeur sinusoïdale ? Quelle est alors la fréquence des oscillations ?

1.3. Exemple de l'oscillateur à résistance négative

1.3.1. Résistance négative

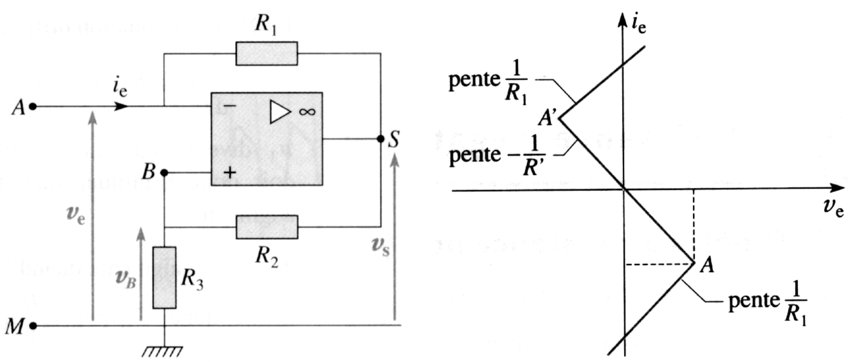
Il existe différents dipôles dont une partie de la caractéristique correspond à une résistance dynamique négative (diode tunnel, lampe au néon,...). Ils sont soit de type N, soit de type S.



Caractéristique d'un dipôle: a) en N b) en S

Il est également possible de simuler un tel comportement avec un montage à A.O..

1.3.2. Résistance négative à amplificateur opérationnel

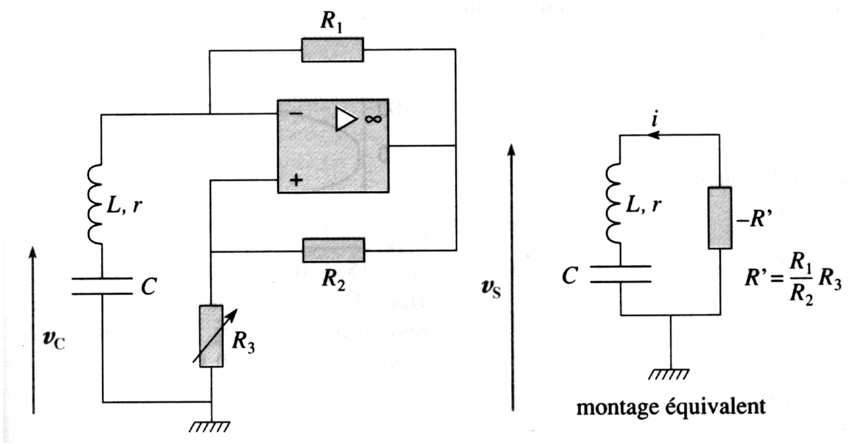


Dipôle à résistance dynamique en S avec A.O.

- Lorsque l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire $v_e = -R' i_e$ avec $R' = R_3 \frac{R_1}{R_2}$.
- si $v_s = V_{sat}$ alors $i_e = \frac{v_e - V_{sat}}{R_1}$; cela correspond à $i_e < -\frac{R_2 V_{sat}}{R_1(R_2+R_3)}$.
- si $v_s = -V_{sat}$ alors $i_e = \frac{v_e + V_{sat}}{R_1}$; cela correspond à $i_e > -\frac{R_2 V_{sat}}{R_1(R_2+R_3)}$.

On obtient le tracé ci-dessus avec $v_{eA} = \frac{R_3}{R_2+R_3} V_{sat} = -v_{eA'}$ et $i_{eA} = -\frac{R_2 V_{sat}}{R_1(R_2+R_3)} = -i_{eA'}$.

1.3.3. Oscillateur à résistance négative



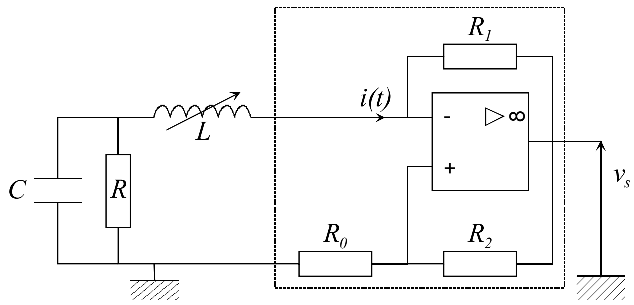
Oscillateur à résistance négative

On réalise un circuit RLC série. On ajoute dans ce circuit une résistance négative $-R'$. Il y a 3 cas :

- si $R > R'$ l'intensité dans le circuit tend vers zéro ;
- si $R = R'$ l'intensité dans le circuit est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;
- si $R < R'$ l'amplitude des oscillations augmente au cours du temps et le phénomène est limité par la non linéarité des différents éléments du circuit.

Pour observer les oscillations il faut donc R' légérement supérieur à R. Le dipôle à résistance négative compense les pertes du circuit oscillant faiblement amorti auquel il est associé. Cette compensation assure l'entretien des oscillations dont l'amplitude est limitée par les non-linéarités de l'A.O..

<u>*Exercice n° 03*</u> :



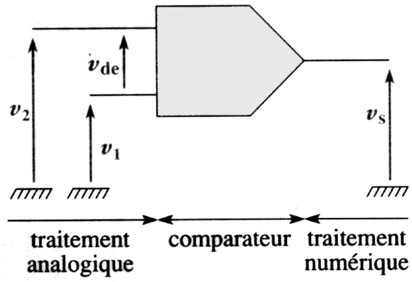
Le montage ci-dessus modélise un oscillateur à résistance négative. On donne $C = 10\,\mathrm{nF}$; $R_0 = 3\,\mathrm{k}\Omega$; $R_1 = 20\,\mathrm{k}\Omega$; $R_2 = R = 10\,\mathrm{k}\Omega$ et L =inductance variable.
1) Montrer que le module encadré en pointillés est équivalent à une résistance négative $-R_n$ que l'on calculera.
2) Etablir l'équation différentielle du second ordre en $i\,(t)$.
3) Pour quelle valeur de l'inductance L obtient-on à la sortie une tension sinusoïdale ? Quelle est la fréquence de cet oscillateur ?

2. Comparateurs simples et à hystérésis

2.1. Comparateurs

2.1.1. Définition

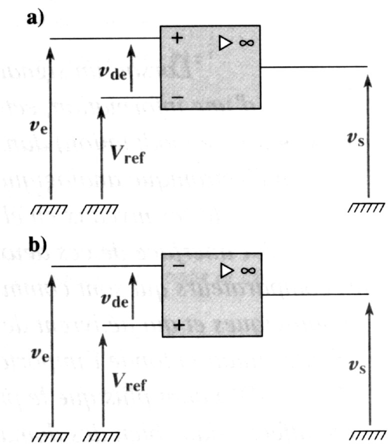
Un comparateur de tension est un composant à **deux entrées** et **une sortie** dont la valeur est fonction de la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = v_2 - v_1$. La tension de sortie ne prend donc que deux valeurs v_{bas} et v_{haut} associées au signe de la tension ε ($\varepsilon = 0$ est exclue).



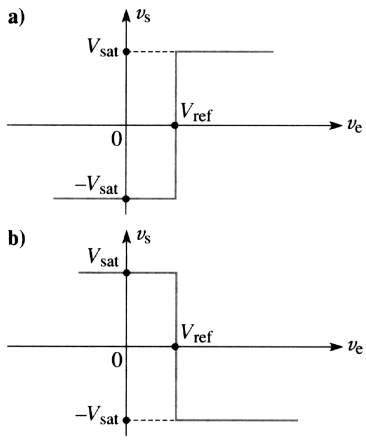
Représentation symbolique d'un comparateur

2.1.2. Comparateurs simples à A.O. idéal

Le comparateur simple est réalisé à l'aide d'un amplificateur opérationnel en boucle ouverte. On impose la valeur seuil $v_{réf}$ sur l'une des deux bornes de l'A.O.. On obtient alors les caractéristiques ci-dessous:



Les deux types de comparateurs simples à A.O. idéal :
a. *comparateur non inverseur ;*
b. *comparateur inverseur.*

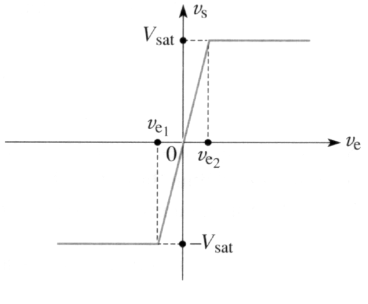


Caractéristiques des deux types de comparateurs simples à A.O. idéal :
a. *comparateur non inverseur ;*
b. *comparateur inverseur.*

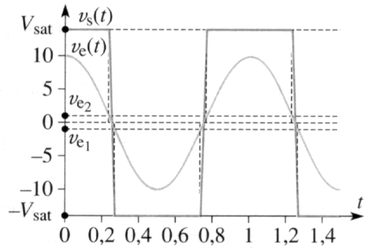
2.1.3.Comparateurs simples à A.O. réel

Les différents défauts de l'A.O. réel modifient les résultats précédents.
On se propose d'étudier ces modifications indépendament les unes des autres.

- **le gain statique est fini** : il y a alors une plage de valeurs $\left[V_{réf} - \frac{V_{sat}}{A_o}, V_{réf} + \frac{V_{sat}}{A_o}\right]$ pour v_e telle que l'A.O. fonctionne en régime linéaire ($\delta v_e = (V_{réf} + \frac{V_{sat}}{A_o}) - (V_{réf} - \frac{V_{sat}}{A_o}) = 2\frac{V_{sat}}{A_o}$ est appelé intervalle de résolution du comparateur).

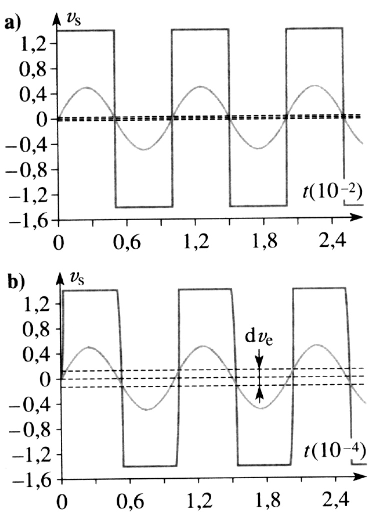


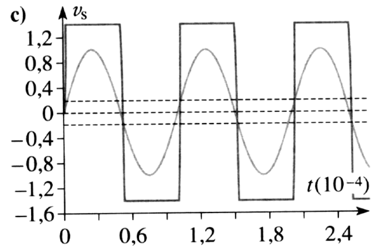
Caractéristique d'un comparateur simple ayant pour unique défaut un gain statique.



Le comparateur bascule d'un état de saturation à l'autre dès que $|v_e(t)| = \frac{V_{sat}}{A_0}$

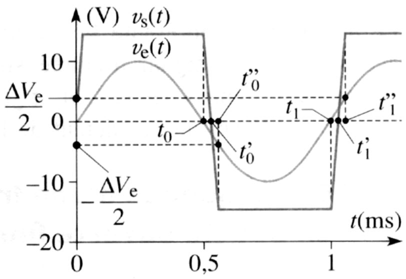
- Il existe une **fréquence de coupure finie pour l'A.O. en boucle ouverte** : pour l'A.O. non inverseur (par exemple) la tension de sortie obéit, en régime linéaire, à l'équation différentielle $\tau\frac{dv_s}{dt} + v_s = A_o v_{de} = A_o\varepsilon$. L'amplificateur opérationnel ne passera en régime saturé que lorsque la solution de l'équation différentielle sera telle que $|v_s(t)| > V_{sat}$. On constate sur les schémas ci-dessous que l'intervalle de résolution augmente avec la fréquence.



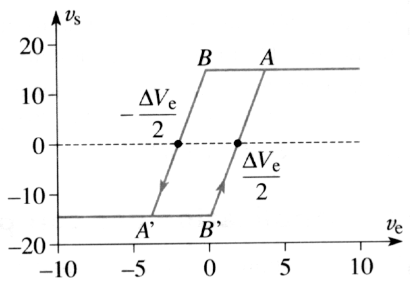


Évolution de l'intervalle de résolution δv_e *pour diverses fréquences et diverses amplitudes du signal d'entrée.*
a. $V_{em} = 5$ V ; $f = 100$ Hz ; $d v_e = 236$ mV .
b. $V_{em} = 5$ V ; $f = 10\ 000$ Hz ; $d v_e = 2\ 627$ mV .
c. $V_{em} = 10$ V ; $f = 10\ 000$ Hz ; $d v_e = 3\ 730$ mV .

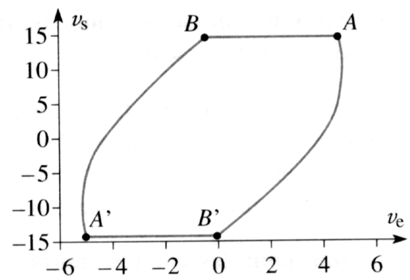
- **la vitesse de balayage est finie** : on rappelle que $\left|\frac{dv_s(t)}{dt}\right|$ ne peut pas dépasser une valeur max notée σ et appelée "*slew rate*". La conséquence est un décalage temporel dans la réponse de l'A.O. : il faut un certain temps au comparateur pour adapter sa sortie à la nouvelle valeur de l'entrée. Si la fréquence augmente le défaut est plus important et on retiendra que **la valeur finie de la vitesse de balayage est le plus important facteur de limitation des performances d'un comparateur simple à A.O..**



Réponse d'un comparateur simple non inverseur à A.O. (type 741) soumis à une commande sinusoïdale de fréquence $f = 1$ kHz .

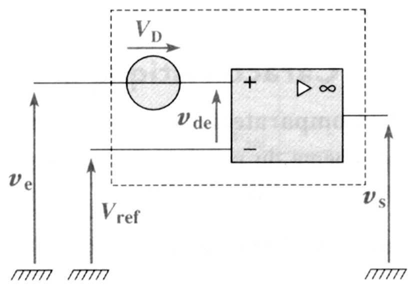


AO 741 soumis à un signal triangulaire de fréquence 1kHz



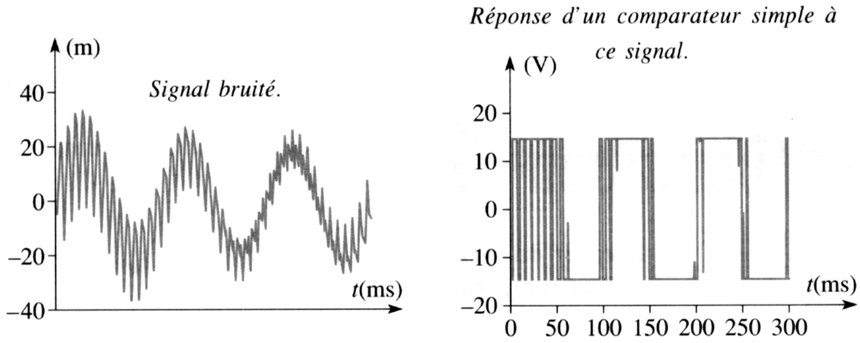
Comparateur simple (AO 741) soumis à un signal sinusoïdal de fréquence 5 kHz

- il peut exister une **tension de décalage** : dans ce cas $\varepsilon = (v_e + V_D) - V_{réf} = v_e - (V_{réf} - V_D)$. Le cycle d'hystérésis n'est plus centré sur $V_{réf}$ mais sur $(V_{réf} - V_D)$.

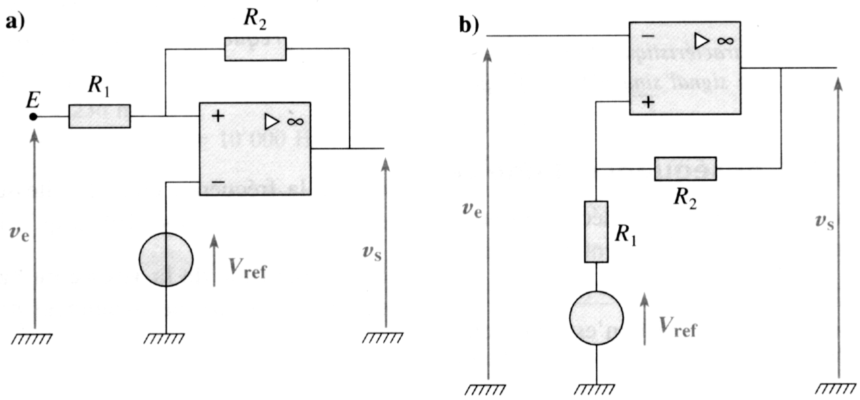


2.2. Comparateur à hystérésis

Les comparateurs précédents sont sensibles au bruit : si la tension d'entrée v_e est voisine de la tension de référence $v_{réf}$, une tension de bruit peut alors provoquer le basculement du comparateur. Pour corriger ce défaut on utilise un comparateur à hystérésis : on effectue une boucle de **rétroaction positive** sur un amplificateur opérationnel (les fronts de commutation seront également plus verticaux).



- Le montage est identique à celui de l'amplificateur inverseur ou non inverseur mais en permutant les bornes inverseuses et non inverseuses de l'amplificateur opérationnel :



Comparateurs à hystérésis : **a.** *non inverseur ;* **b.** *inverseur.*

- Le fonctionnement est instable : la sortie ne peut donc prendre que deux valeurs ; le lien entre l'entrée et la sortie est un cycle d'hystérésis.

  – **Cas du comparateur non inverseur :**
  d'après le théorème de Millman

  $$\varepsilon = v_+ - v_- = \frac{R_2 v_e + R_1 v_s}{R_1 + R_2} - V_{réf}$$

  ∗ on suppose que l'amplificateur opérationnel est saturé positivement ;
  dans ce cas :

  $$\begin{aligned} v_s = +V_{sat} \text{ et } \varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon &= \frac{R_2 v_e + R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} - V_{réf} > 0 \\ \Rightarrow v_e &> \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{réf} - \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = v_{e1} \end{aligned}$$

  le basculement de $v_s = +V_{sat}$ à $v_s = -V_{sat}$ se fait pour la tension de seuil $v_e = v_{e1}$, au point de fonctionnement B.

* si l'amplificateur opérationnel est saturé négativement :

$$v_s = -V_{sat} \text{ et } \varepsilon < 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{R_2 v_e - R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} - V_{réf} < 0$$
$$\Rightarrow v_e < \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{réf} + \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = v_{e2}$$

le basculement de $v_s = -V_{sat}$ à $v_s = +V_{sat}$ se fait pour la tension de seuil $v_e = v_{e2}$, au point de fonctionnement B'.

– **Cas du comparateur inverseur :**

* on suppose que l'amplificateur opérationnel est saturé positivement ;
dans ce cas :

$$v_e < \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{réf} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = v_{e2}$$

le basculement de $v_s = +V_{sat}$ à $v_s = -V_{sat}$ se fait pour la tension de seuil $v_e = v_{e2}$, au point de fonctionnement B.

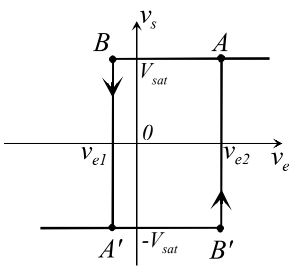
* si l'amplificateur opérationnel est saturé négativement:

$$v_e > \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{réf} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = v_{e1}$$

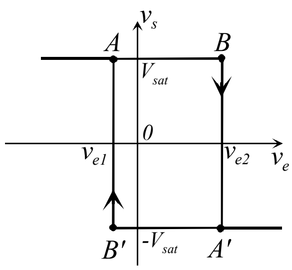
le basculement de $v_s = -V_{sat}$ à $v_s = +V_{sat}$ se fait pour la tension de seuil $v_e = v_{e2}$, au point de fonctionnement B'.

– Le comparateur inverseur a l'avantage d'avoir une impédance d'entrée très grande alors que l'impédance d'entrée du comparateur non inverseur est égale à R_1.

– On obtient les cycles d'hystérésis ci-dessous qui se déformeront en régime dynamique si la fréquence augmente :



Caractéristique statique de transfert d'un comparateur non inverseur à hystérésis



Caractéristique statique de transfert d'un comparateur inverseur à hystérésis

- On choisit $V_{réf} = 0$; La valeur de la sortie lorsqu'on annule l'entrée dépend des états antérieurs du système : **fonction mémoire**.

2.3. Multivibrateurs

2.3.1. Définition

Un **multivibrateur** ou **bascule** est un circuit possédant deux états de fonctionnement :

- si les deux états sont instables, on a alors un oscillateur de relaxation appelé **multivibrateur astable**.
- si l'un des deux états est stable et l'autre instable, on a alors un **multivibrateur monostable** qui peut être utilisé pour introduire un retard.
- si les deux états sont stables, on a alors un circuit mémoire appelé **multivibrateur bistable**.

Nous étudions dans la suite le cas du multivibrateur astable.

2.3.2. Principe d'un multivibrateur astable

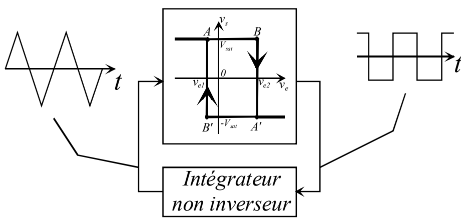
Le montage est constitué de deux éléments :

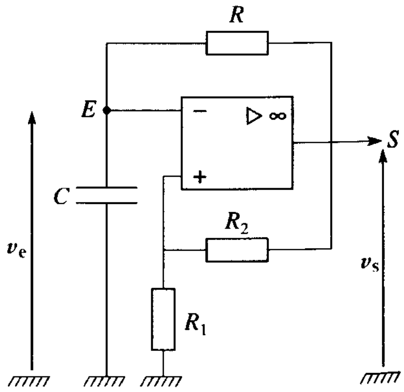
- un comparateur à hystérésis
- un circuit qui amènera le point de fonctionnement du comparateur vers un point de basculement B ou B'.

2.3.3. Réalisation d'un multivibrateur astable

Plusieurs montages sont possibles et nous étudions le cas où le deuxième circuit est un **intégrateur**.

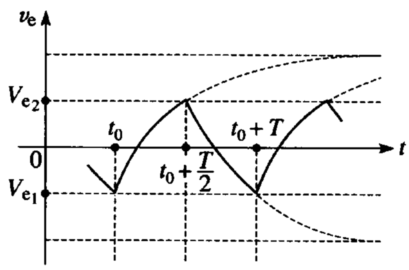
2.3.3.1. Modèle à un seul amplificateur opérationnel

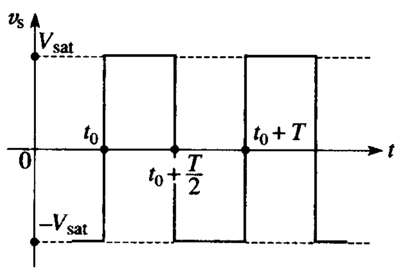




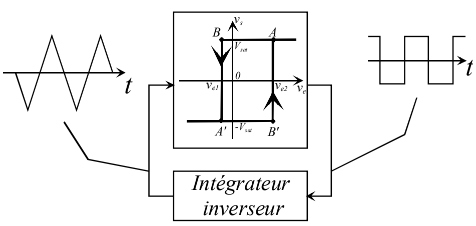
- **Schéma fonctionnel :**
  le montage comporte un comparateur inverseur à hystérésis et un intégrateur non inverseur.
- **Réalisation :**
  dans le modèle à 1 seul A.O. l'intégrateur est rudimentaire puisque qu'il s'agit d'un circuit RC.
- **Chronogramme :**
  les tensions v_e et v_s sont $T-$périodique et T est donnée par :

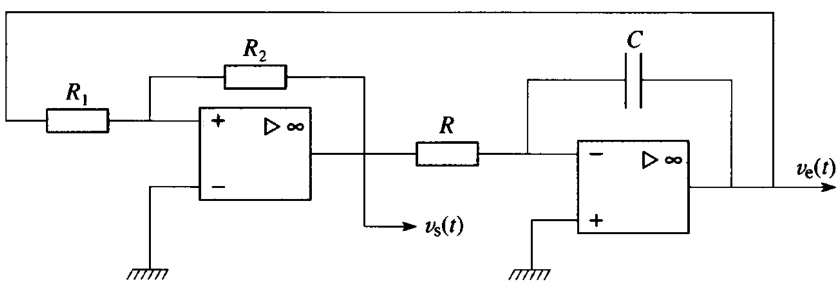
$$T = 2\tau \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC \quad \text{et} \quad k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$





2.3.3.2. Modèle à deux amplificateurs opérationnels



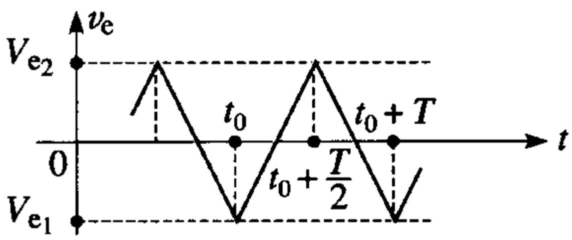


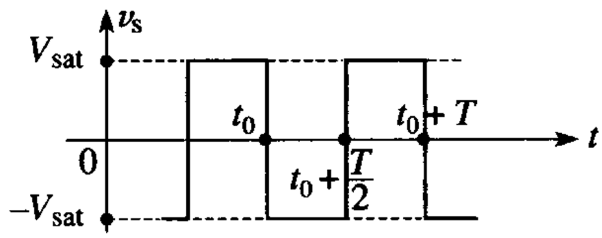
- **Schéma fonctionnel :**
  le montage comporte un comparateur non inverseur à hystérésis et un intégrateur inverseur.

- **Réalisation :**
  dans le modèle à 2 A.O. l'intégrateur est plus performant puisque qu'il s'agit d'un circuit à A.O..

- **Chronogramme :**
  les tensions v_e et v_s sont $T-$périodique et T est donnée par :

$$T = 4\frac{R_1}{R_2}RC$$





Exercice n° 04 :
Après une étude complète de l'astable à 1 A.O. retrouver l'expression de la période.

Exercice n° 05 :
Après une étude complète de l'astable à 2 A.O. retrouver l'expression de la période.