Conversion électromécanique

Chapitre III : Machines à courant continu

Objectifs :

- *Décrire le principe des machines à courant continu*
- *Etablir les expressions du moment et de la f.e.m..*

1. Description succinte de la machine

1.1. Définition

Une **machine** est dite **à courant continu** lorsque les grandeurs électriques (potentiels et courants) sont unidirectionnelles.

- Une machine à courant continu est un **convertisseur électromécanique rotatif** « réversible » (ou « inversible ») permettant :
  - une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique : fonctionnement **moteur** ;
  - une conversion d'énergie mécanique en énergie électrique: fonctionnement **génératrice**.
- Une machine à courant continu est un convertisseur électromécanique rotatif utilisant :
  - les **forces de Laplace** dans le dispositif mécanique;
  - les phénomènes d'**induction électromagnétique** dans le dispositif électrique.

1.2. Structure

Voir structure sur le document annexe.
Une machine à courant continu s'analyse en un **circuit magnétique**, deux **circuits électriques** et un **dispositif de commutation** :

- le **circuit magnétique** est constitué d'une partie fixe, le **stator** ou **inducteur** (1 et 7) solidaire du bâti (2) de la machine dont l'arbre porte la partie mobile, le **rotor** ou **induit** (4). Entre le stator et le rotor se trouve l'entrefer (5). Un champ magnétique intense est nécessaire pour obtenir une machine performante. Afin d'obtenir des champs magnétiques importants (de l'ordre du tesla), le stator est réalisé avec des matériaux ferromagnétiques. L'entrefer entre induit et inducteur doit être étroit pour limiter les pertes de flux, et obtenir ainsi un champ intense.
- **circuits électriques :**
  - **circuit de l'inducteur** : Il est formé de bobines (6) montées en série, alimentées en courant continu et placées autour d'un nombre pair $2p$ de pièces polaires (7). La machine du document annexe (Doc a) est bipolaire ($2p = 2$) avec un pôle nord et un pôle sud. Les machines multipolaires ($2p > 2$) possèdent p pôles nord alternés avec p pôles sud. Sur le document (Doc b), nous avons une machine tétrapolaire.
    Les lignes de champ (13) partent des pôles nord, traversent l'entrefer, puis le rotor où elles sont canalisées, ensuite elles franchissent à nouveau l'entrefer, aboutissent aux pôles sud et retournent par le stator aux pôles nord.
    Dans le cas d'une machine bipolaire , l'axe des pôles (x'Ox) (8) est un axe de symétrie du circuit magnétique et des lignes de champ magnétique. La ligne neutre (y'Oy) (9) est un axe d'antisymétrie du circuit magnétique et des lignes de champ magnétique.
  - **circuit de l'induit** : Il est réalisé par un enroulement, sous forme de spires, autour du rotor de forme cylindrique (cylindre de hauteur h et de rayon R). Les parties de cet enroulement qui se trouvent dans le champ magnétique, à l'intérieur d'encoches (10) taillées le long des génératrices du rotor, forment les conducteurs actifs, par opposition aux conducteurs passifs qui se trouvent, à l'extérieur du champ magnétique, sur les deux bases du rotor.
- **dispositif de commutation** : les extrémités des spires sont soudées sur un ensemble de 2a lames de cuivre solidaires du rotor et isolées les unes des autres. L'ensemble de ces lames forme le collecteur (11) de la machine. Sur le collecteur frottent des balais (12) en graphite, solidaires du bâti, donc fixes. Le collecteur et les balais réalisent un dispositif de commutation.
  Celui-ci permet l'établissement de la liaison électrique entre le circuit d'induit et l'extérieur de la machine.

Les machines à courant continu étant des machines à deux circuits électriques, il existe plusieurs possibilités de branchement de ces circuits, ce qui conduit à autant de types de machines. Citons trois types :

- machine à **excitation indépendante**, dont le circuit inducteur est séparé du circuit de l'induit ;
- machine à **excitation série**, dont le circuit inducteur est en série avec le circuit de l'induit;
- machine à **excitation parallèle** (ou shunt), dont le circuit inducteur est en parallèle sur le circuit de l'induit.

Les machines les plus utilisées sont :

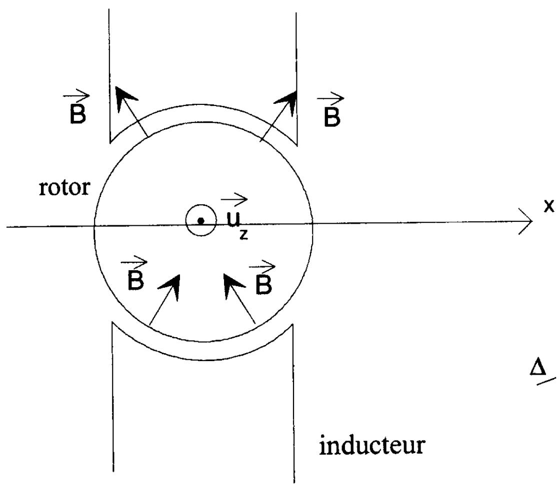
- les machines à excitation indépendante ;
- les machines à excitation série.

En particulier, les moteurs universels (moteurs particulièrement répandus) sont des moteurs à excitation série pouvant être alimentés en courant continu ou en courant alternatif.

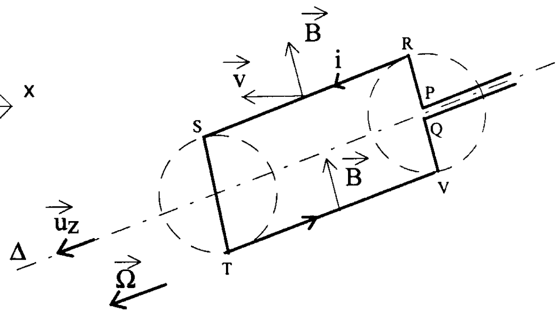
2. Principe de fonctionnement avec une seule spire

2.1. Description

On se propose d'expliquer le principe de fonctionnement des machines à courant continu en étudiant le mouvement d'une spire dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ radial.
On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz.
L'inducteur crée un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ radial indépendant de la côte z : $\overrightarrow{B} = B(r,\theta).\overrightarrow{u}_r$. De plus ce champ est antisymétrique par rapport à l'axe Oz : $B(r, \theta+\pi) = -B(r,\theta) \Leftrightarrow \vec{B}(r,\theta+\pi) = \vec{B}(r,\theta)$ car $\overrightarrow{u}_r(\theta+\pi) = -\overrightarrow{u}_r(\theta)$.
La spire parcourue par un courant i est entraînée en rotation autour de Oz à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega} = \omega.\overrightarrow{u}_z$. On note L la longueur de la spire: $L = RS$ et d sa largeur.



création du champ radial



Cas d'une spire

2.2. Moment résultant des forces de Laplace

On recherche la résultante des forces $\overrightarrow{F}$ et le moment résultant $\overrightarrow{\Gamma}$ s'exerçant sur la spire :

- La force de Laplace est donnée par :

$$\overrightarrow{F} = \int_{spire} \overrightarrow{dF} = \int_{spire} i\overrightarrow{dL} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= \int_{PR}\left(i\overrightarrow{dL}\wedge\overrightarrow{B}\right) + \int_{RS}\left(i\overrightarrow{dL}\wedge\overrightarrow{B}\right) + \int_{ST}\left(i\overrightarrow{dL}\wedge\overrightarrow{B}\right) + \int_{TV}\left(i\overrightarrow{dL}\wedge\overrightarrow{B}\right) + \int_{VQ}\left(i\overrightarrow{dL}\wedge\overrightarrow{B}\right) \\
&= \overrightarrow{0} + i\left(\int_{RS}\overrightarrow{dL}\right)\wedge\overrightarrow{B}\,(d/2,\theta) + \overrightarrow{0} + i\left(\int_{TV}\overrightarrow{dL}\right)\wedge\overrightarrow{B}\,(d/2,\theta+\pi) + \overrightarrow{0} \\
&= iL\overrightarrow{u}_z\wedge\overrightarrow{B}\,(d/2,\theta) + i\left(-L\overrightarrow{u}_z\right)\wedge\overrightarrow{B}\,(d/2,\theta)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

La résultante des forces est nulle. Le torseur des forces est un **couple.**

- Le moment résultant $\overrightarrow{\Gamma}$, par rapport à l'axe Oz, des forces de Laplace est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma} &= \Gamma.\overrightarrow{u}_z \text{ avec } \Gamma = \overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{u}_z = \left(\int_{RS} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF}\right).\overrightarrow{u}_z + \left(\int_{TV} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF}\right).\overrightarrow{u}_z \\
&= \int_{RS} \left(\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF}\right).\overrightarrow{u}_z\right) + \int_{TV} \left(\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF}\right).\overrightarrow{u}_z\right) = \int_{RS} \left(\left(\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}\right).\overrightarrow{dF}\right) + \int_{TV} \left(\left(\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}\right).\overrightarrow{dF}\right) \\
&= \int_{RS} \left(\left(\overrightarrow{u}_z \wedge \left(\frac{d}{2}\overrightarrow{u}_r(\theta) + z\overrightarrow{u}_z\right)\right).\overrightarrow{dF}\right) + \int_{TV} \left(\left(\overrightarrow{u}_z \wedge \left(\frac{d}{2}\overrightarrow{u}_r(\theta+\pi) + z\overrightarrow{u}_z\right)\right).\overrightarrow{dF}\right) \\
&= \int_{RS} \left(\frac{d}{2}\overrightarrow{u}_\theta(\theta).\overrightarrow{dF}\right) + \int_{TV} \left(\frac{d}{2}\overrightarrow{u}_\theta(\theta+\pi).\overrightarrow{dF}\right) \\
&= \int_{RS} \left(\frac{d}{2}\overrightarrow{u}_\theta(\theta).\left(idz\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{B}(d/2,\theta)\right)\right) + \int_{TV} \left(\frac{d}{2}\overrightarrow{u}_\theta(\theta+\pi).\left(idz\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{B}(d/2,\theta+\pi)\right)\right) \\
&= \int_{RS} \left(\frac{d}{2}\overrightarrow{u}_\theta(\theta).\left(idz\left\|\vec{B}\right\|\overrightarrow{u}_\theta(\theta)\right)\right) + \int_{TV} \left(\frac{d}{2}\overrightarrow{u}_\theta(\theta+\pi).\left(idz\left(-\left\|\vec{B}\right\|\right)\overrightarrow{u}_\theta(\theta+\pi)\right)\right) \\
&= \frac{d}{2}i\left\|\vec{B}\right\|\int_{RS} dz + \frac{d}{2}i\left(-\left\|\vec{B}\right\|\right)\int_{TV} dz = \frac{d}{2}i\left\|\vec{B}\right\| L + \frac{d}{2}i\left(-\left\|\vec{B}\right\|\right)(-L) = diLB
\end{aligned}
$$

Le moment résultant $\overrightarrow{\Gamma}$, par rapport à l'axe Oz, des forces de Laplace est $\overrightarrow{\Gamma} = diLB\overrightarrow{u}_z = \vec{M} \wedge \vec{B}$; $\overrightarrow{\Gamma}$ est appelé couple moteur ($\vec{M}$ est le moment magnétique de la spire).
La puissance mécanique de ce système de forces est $P_L = \Gamma\,\omega = d\,i\,L\,B\,\omega$

2.3. Fém induite

On recherche la f.e.m. induite dans la spire :

$$
\begin{aligned}
e(t) &= \oint_{spire} \overrightarrow{E}_m.d\overrightarrow{L} \text{ avec } \overrightarrow{E}_m = \overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B} = \textit{champ électromoteur de direction } Oz \\
&\Rightarrow e(t) = \int_{RS} \left(\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}\right).d\overrightarrow{L} + \int_{TV} \left(\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}\right).d\overrightarrow{L} \\
&= \int_{RS} \left(-r\omega B\overrightarrow{u}_z\right).d\overrightarrow{L} + \int_{TV} \left(+r\omega B\overrightarrow{u}_z\right).d\overrightarrow{L} \\
&= \left(-\frac{d}{2}\right)\omega BL + \frac{d}{2}\omega B(-L) \\
&\Rightarrow e(t) = -d\omega BL
\end{aligned}
$$

La f.e.m. induite dans la spire est donné par $e(t) = -\,d\,\omega\,B\,L$
La puissance électrique de cette f.e.m. induite est $P_e = e.i = -\,d\,\omega\,B\,L\,i$

2.4. Conversion électromagnétique de la puissance

D'après 2.2. et 2.3. on a :

une conversion électromécanique avec $P_e + P_L = 0$ soit $e.i + \Gamma\,\omega = 0$

Attention :

- **P_e est la puissance électrique de la f.e.m. induite en convention <u>générateur</u> ;**
- **P_L est la puissance mécanique du système de forces en convention <u>générateur</u>.**

3. Généralisation à l'enroulement de plusieurs spires

- Pour obtenir une puissance plus importante on place plusieurs spires en série. Cet **enroulement** donne :
  - un couple plus important (on somme les couples associés à chaque spire) ;
  - une f.e.m. plus importante (on somme les f.e.m. associés à chaque spire).
- Les forces de Laplace sont proportionnelles au courant i qui circule dans l'induit, donc le moment scalaire résultant Γ des forces de Laplace par rapport à l'axe de rotation du rotor est lui aussi proportionnel à ce courant i. Le coefficient de proportionnalité est homogène à un flux: on pose $\boxed{\Gamma = \Phi_o i}$.

- La f.e.m. e induite dans le circuit induit est proportionnelle à la vitesse des parties de circuit dans le champ magnétique, donc proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ω du rotor. Le coefficient de proportionalité est homogène à un flux. D'après la propriété de conversion électromagnétique de la puissance, ce coefficient de proportionnalité est identique. au précédent. On a donc $\boxed{e = -\Phi_o \omega}$.

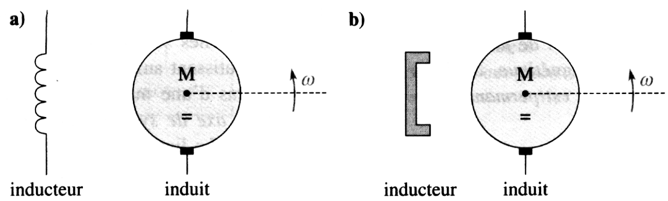
Remarques :

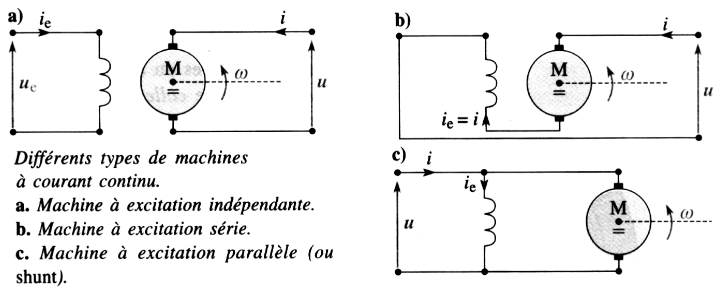
- Φ_o est un **flux** et s'exprime en **weber** (symbole Wb): $1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{T.\,m^2}$.
- Φ_o **est une constante** mais elle peut varier si l'on modifie les caractéristiques de l'inducteur (pour une machine à excitation indépendante, dont le circuit inducteur est séparé du circuit de l'induit, il suffit de modifier le courant circulant dans l'inducteur).
- Rappel : **la f.e.m. e est orientée dans le sens choisi pour l'orientation du circuit.**
- Le phénomène d'induction propre existe dans l'enroulement induit ; pour tenir compte de ce phénomène, généralement négligeable, on ajoute une inductance propre L dans le schéma électrique équivalent (cf. § 4.1.)

4. Fonctionnement moteur ou générateur

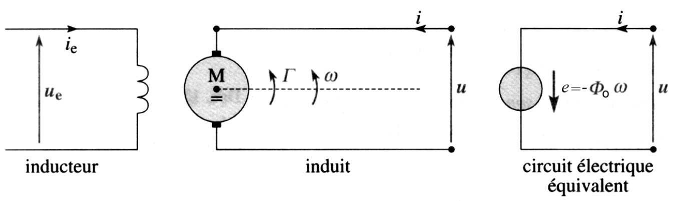
4.1. Symbole d'une machine à courant continu et schéma électrique équivalent de la machine modélisée

Représentation d'une machine à courant continu.
***a.** À circuit inducteur.*
***b.** À aimant permanent.*

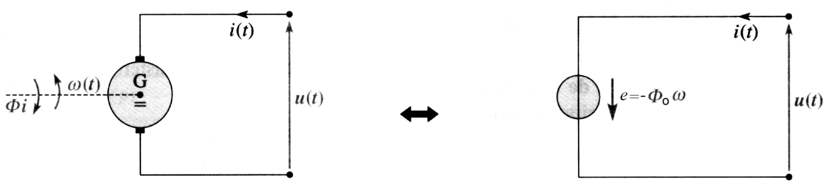




Différents types de machines à courant continu.
***a.** Machine à excitation indépendante.*
***b.** Machine à excitation série.*
***c.** Machine à excitation parallèle (ou **shunt**).*



Convention de signes sur les grandeurs électriques et mécaniques d'une machine à courant continu à caractère moteur.



Utilisation d'une machine à courant continu en génératrice et son schéma électrique équivalent.

En tenant compte de la résistance de l'induit et de son inductance propre on a le schéma électrique équivalent ci-dessous :

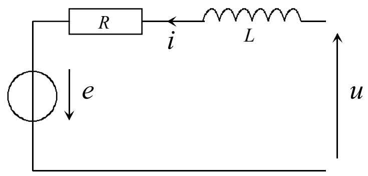


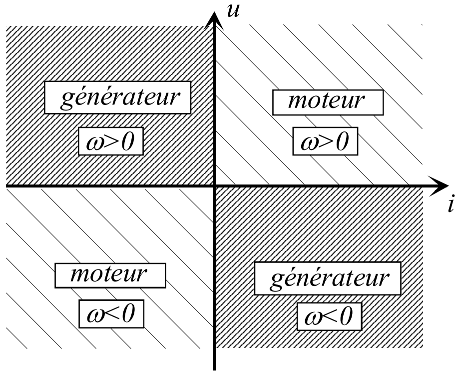
Schéma électrique équivalent de l'induit

Dans la suite du cours, sauf indication contraire, on négligera L.

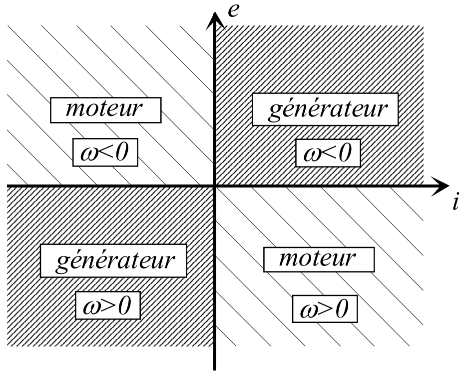
4.2. Réversibilité

On peut alors envisager différents fonctionnement :

- **Fonctionnement en moteur :** ui et $\Gamma\omega > 0$
  Le moteur convertit une **puissance électrique en puissance mécanique** : un courant dans l'induit est créé par un générateur électrique, d'où la rotation du rotor sous l'action des forces de Laplace, d'où l'apparition d'une f.e.m. induite qui s'oppose au générateur (loi de Lenz) :
  - **On impose une tension** $u > 0$ donc un courant $i > 0$ car $ui > 0$:
    * le couple électromagnétique $\Gamma = \Phi_o i > 0$,
    * la machine tourne avec $\omega > 0$ car $\Gamma\omega > 0$ (fonctionnement moteur),
    * la f.e.m $e = -\Phi_o\omega < 0$ s'oppose au courant i.
  - **On impose une tension** $u < 0$ donc un courant $i < 0$ car $ui > 0$:
    * le couple électromagnétique $\Gamma = \Phi_o i < 0$,
    * la machine tourne avec $\omega < 0$ car $\Gamma\omega > 0$ (fonctionnement moteur),
    * la f.e.m $e > 0$ s'oppose au courant i.
- **Fonctionnement en générateur :** $\Gamma\omega$ et $ui < 0$
  La génératrice convertit une **puissance mécanique en puissance électrique** : un dispositif mécanique met en rotation le rotor, d'où l'apparition d'une f.e.m. induite, d'où l'apparition d'un courant induit si le circuit est fermé, d'où l'apparition de forces de Laplace qui s'opposent au couple moteur mécanique (loi de Lenz) :
  - **On impose une rotation** $\omega > 0$ **:**
    * la f.e.m $e = -\,\Phi_o\omega < 0$ impose un courant $i < 0$ donc $u > 0$,
    * le couple électromagnétique $\Gamma = \Phi_o i < 0$ est résistant.
  - **On impose une rotation** $\omega < 0$ **:**
    * la f.e.m $e = -\,\Phi_o\omega > 0$ impose un courant $i > 0$ donc $u < 0$,
    * le couple électromagnétique $\Gamma = \Phi_o i > 0$ est résistant.



Signes de u et i dans les différents régimes de fonctionnement



Signes de e et i dans les différents régimes de fonctionnement

5. Modélisation du moteur à courant continu

5.1. Cas d'un moteur à excitation indépendante et à flux constant

5.1.1. Mise en équation

On recherche les équations d'un moteur à **excitation indépendante** et à **flux constant** (on suppose donc i_e constant). En tenant compte de la résistance de l'induit et de son inductance propre on a :

- **L'équation électrique** :

$$\begin{aligned} u &= -e + Ri + L\frac{di}{dt} \text{ avec } e = -\Phi_o\,\omega \\ &\Rightarrow \; u = \Phi_o\,\omega + Ri + L\frac{di}{dt} \quad (E) \end{aligned}$$

- **L'équation mécanique :**
  on l'obtient par application du théorème du moment cinétique pour le système en rotation autour de l'axe noté Δ :
  - soit J le moment d'inertie du rotor et de la charge mécanique par rapport à l'axe Δ ;
  - soit Γ_r le moment des forces, soit de frottements, soit dûes à la charge mécanique (on suppose que ce moment ne dépend que de la vitesse de rotation $\Gamma_r = \Gamma_r(\omega)$).
  - le théorème du moment cinétique donne :

$$\begin{aligned} J\frac{d\omega}{dt} &= \sum \Gamma_\Delta = \Gamma + \Gamma_r \\ &\Rightarrow \; J\frac{d\omega}{dt} = \Phi_o i + \Gamma_r \quad (M) \end{aligned}$$

En reportant l'équation mécanique dans l'équation électrique on obtient :

$$(M) \Rightarrow i = \frac{1}{\Phi_o}\left(J\frac{d\omega}{dt} - \Gamma_r\right)$$

$$(E) \Rightarrow u = \Phi_o\,\omega + Ri + L\frac{di}{dt} = \Phi_o\,\omega + R\left[\frac{1}{\Phi_o}\left(J\frac{d\omega}{dt} - \Gamma_r\right)\right] + L\frac{d\left[\frac{1}{\Phi_o}\left(J\frac{d\omega}{dt} - \Gamma_r\right)\right]}{dt}$$

$$\Rightarrow LJ\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left(RJ - L\frac{d\Gamma_r}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{dt} + \Phi_o^2\omega - R\,\Gamma_r = \Phi_o u \text{ où } u = u\,(t) \text{ et } \Gamma_r = \Gamma_r(\omega)$$

Un moteur à excitation indépendante et à flux constant est donc un système d'ordre 2. Ce système n'est linéaire que si le moment du couple résistant est une fonction affine de la vitesse car dans ce cas $\frac{d\Gamma_r(\omega)}{d\omega} = cste$.

Comme mentionner au § 3. le phénomène d'induction propre est souvent négligeable et on retiendra :

Un moteur à excitation indépendante et à flux constant, dont les phénomènes d'induction propre sont négligeables, est un système linéaire d'ordre 1 régit par l'équation différentielle :

$$\boxed{RJ\frac{d\omega}{dt} + \Phi_o^2\omega - R\,\Gamma_r(\omega) = \Phi_o u(t)}$$

si le moment du couple résistant Γ_r est une fonction affine de la vitesse le système est linéaire :

$$RJ\frac{d\omega}{dt} + \left(\Phi_o^2 + Rf\right)\omega = \Phi_o u(t) + R\Gamma_0 \text{ avec } \Gamma_r(\omega) = -f\omega + \Gamma_0 \quad f \text{ et } \Gamma_0 = cstes$$

Exercice n° 01 : Caractéristiques d'un moteur à courant continu

Un moteur à courant continu à aimants permanents a pour valeurs nominales :

· la tension aux bornes de l'induit : $U_N = 12\,\text{V}$;
· l'intensité du courant d'induit : $I_N = 2,5\,\text{A}$;
· la fréquence de rotation : $\omega = 100\,\text{tr.s}^{-1}$;
· la résistance de l'induit : $R = 0,4\,\Omega$.

On néglige toutes les pertes autre que par effet Joule.

1) Calculer au fonctionnement nominal :

· la f.e.m. ;
· la puissance absorbée, la puissance utile et le rendement ;
· le moment du couple utile.

2) Fonctionnement sous tension réduite :

On souhaite que le moteur fournisse sa valeur nominale de couple à la vitesse de rotation de $60\,\mathrm{tr.\,s^{-1}}$. Déterminer le courant d'induit, la f.e.m., la tension d'alimentation et le rendement du moteur.

3) Démarrage du moteur :

On fait démarrer le moteur sous une intensité égale à $1,5$ fois sa valeur nominale. Calculer le couple utile et la tension aux bornes du moteur lors du démarrage (vitesse de rotation nulle).

5.1.2. Démarrage du moteur

C'est le terme $\Gamma_r(0)$ qui s'oppose au démarage du moteur.
Pour que le moteur démarre il faut que :

- 1^{er} cas : rotation dans le sens positif donc $u > 0$:
  le moteur démarre si $\frac{d\omega}{dt} > 0$ donc si $\Phi_o u(0) + R\Gamma_r(0) > 0$. La tension de l'induit à $t = 0$ doit être suffisament élevée pour avoir $u(0) > U_{dém} = \frac{R|\Gamma_r(0)|}{\Phi_o} > 0$ (NB : $\Gamma_r(0) < 0$).
- $2^{ème}$ cas : rotation dans le sens négatif donc $u < 0$:
  le moteur démarre si $\frac{d\omega}{dt} < 0$ donc si $\Phi_o u(0) + R\Gamma_r(0) < 0$. La tension de l'induit à $t = 0$ doit être suffisament élevée (en valeur absolue) pour avoir $u(0) < -U_{dém} = -\frac{R\Gamma_r(0)}{\Phi_o}$ (NB : $\Gamma_r(0) > 0$).

Pour démarrer un moteur il faut une tension supérieure en valeur absolue à $U_{dém} = \frac{R|\Gamma_r(0)|}{\Phi_o}$.
On veillera à ne pas utiliser une tension de démarrage trop supérieure à $U_{dém}$ (en valeur absolue) pour ne pas endommager l'induit par un courant trop important. Dans la pratique on prend pour $u$une rampe de tension.

Exercice n° 02 : Réponse d'un moteur à une rampe de tension

Un moteur à excitation indépendante de constante $\Phi_0 = 2,5\,\mathrm{Wb}$ et de résistance d'induit $R = 1\,\Omega$, a un arbre (rotor et charge mécanique) de moment d'inertie $J = 5.10^{-2}\,\mathrm{kg.\,m^2}$.
Le moment du couple résistant opposé par les frottements et la charge mécanique est $\Gamma_r = -\Gamma_0 - h\omega$ avec $\Gamma_0 = 50\,\mathrm{N.\,m}$, $h = 0,5S.I.$ pour ω en $\mathrm{rad.\,s^{-1}}$. Une rampe de tension $u(t) = at$ de $a = 10\,\mathrm{V.\,s^{-1}}$ est appliquée aux bornes de son induit.
En négligeant la f.e.m. propre à l'inductance du circuit d'induit, déterminer la vitesse $\omega\,(t)$ du moteur lors de sa phase de démarrage.

5.1.3. Cas du moteur à vide

Rappel : Γ_r est le moment des forces, soit de frottements, soit dûes à la charge mécanique : $\Gamma_r = \Gamma_{frot} + \Gamma_{charge}$. Le moteur étant à vide (pas de charge mécanique $\Gamma_{charge} = 0$) il ne reste que le moment des forces de frottements $\Gamma_r = \Gamma_{frot}$.

- **On suppose tout d'abord qu'il n'y a pas de frottements** : $\Gamma_r = \Gamma_{frot} = 0$.
  L'équation du paragraphe précédent s'écrit :
  $$RJ\frac{d\omega}{dt} + \Phi_o^2\omega = \Phi_o u(t)$$
  Le régime libre associé à cette équation est de la forme :
  $$\omega(t) = A.e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \frac{RJ}{\Phi_o^2} = \textit{cste de temps électromécanique}$$
  Si on se place en régime permanent on a $\Phi_o^2\omega = \Phi_o\,u(t)$ soit $\Phi_o\,\omega_o = U$
  La mesure de U et de ω donne une valeur de Φ_o.
  On peut remarquer que dans ce cas l'équation mécanique $i = \frac{1}{\Phi_o}\left(J\frac{d\omega}{dt} - \Gamma_r\right)$ donne un courant nul ($i = 0$) : il n'y a pas besoin de couple moteur pour maintenir la vitesse de rotation constante (pas de frottement et pas de charge).
- **On suppose que les frottements sont de type visqueux** : $\Gamma_{frot} = -f\,\omega$:
  L'équation du paragraphe précédent s'écrit :
  $$\begin{aligned} RJ\frac{d\omega}{dt} + \Phi_o^2\omega &= \Phi_o\,u(t) + R\,\Gamma_r(\omega) \\ &= \Phi_o\,u(t) - R\,f\,\omega \end{aligned}$$
  $$\Rightarrow RJ\frac{d\omega}{dt} + \left(\Phi_o^2 + R\,f\right)\omega = \Phi_o\,u(t)$$
  On suppose R connue (ordre de grandeur mesurée à l'ohmètre). Pour déterminer les contantes J,f et Φ_o on réalise différentes expériences et selon les mesures effectuées on accède aux différents coefficients :

– en régime permanent avec une vitesse ω_o et une tension U on a: $\left(\Phi_o^2 + Rf\right)\omega_o = \Phi_o U$ et $\Gamma = \Phi_o i = f\omega$.

– en coupant l'alimentation U de l'induit (*essai de lâcher)* : ω obéit à l'équation $RJ\frac{d\omega}{dt} + \left(\Phi_o^2 + Rf\right)\omega = 0$ soit $\omega(t) = \omega_o e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{RJ}{\Phi_o^2 + Rf}$.

<u>*Exercice n° 03*</u> : Identification d'un moteur à courant continu

On s'intéresse ici à un ensemble constitué d'un moteur à courant continu à excitation séparée et d'une charge mécanique, tous deux montés sur un même arbre.

1 : On postule pour la charge la caractéristique couple-vitesse $C_r. = -\alpha\omega$ avec $\alpha =$ constante positive. Interpréter le signe de α. Exprimer la transmittance $T_m(p) = \Omega(p)/C(p)$.

2 : On désire déterminer expérimentalement les paramètres J et α ; pour ce faire, on effectue deux essais :

Essai 1 : Pour différentes valeurs de couple C appliqué, on mesure, après établissement du régime permanent, la valeur ω de la vitesse angulaire. On obtient les résultats consignés dans le tableau ci-dessous :

Couple C $(\mathrm{N.m})$	5	10	15
vitesse ω $\left(\mathrm{rad.s^{-1}}\right)$	50	100	150

Essai 2 : Lorsque la charge est en rotation à vitesse angulaire Ω_0, on applique un couple C nul à partir d'une date choisie comme origine des temps et on mesure le temps T_0 au bout duquel la vitesse ne vaut plus que 50% de sa valeur initiale Ω_0. Pour $\Omega_0 = 150\,\mathrm{rad.s^{-1}}$, on a mesuré $T_0 = 10,4\,\mathrm{s}$.

A l'aide éventuellement d'une exploitation graphique, déterminer α et J.

Dans l'essai 2, si l'on modifie la valeur initiale Ω_0, comment doit se trouver modifié T_0 si le modèle proposé est correct ?

3 : La loi $C_r = -\alpha\omega$ rend-elle compte de l'arrêt de la machine au bout d'un temps T_1 ? On a mesuré $T_1 = 42\,\mathrm{s}$.

Proposer une correction à la loi liant $C_r.$ à ω pour pallier ce problème. Calculer numériquement le ou les coefficients introduits à cet effet (on conservera les valeurs précédemment obtenues pour J et α).

Quel écart relatif induirait cette correction sur la valeur de T_0 ? Conclure sur l'incertitude relative des mesures précédentes.

<u>*Exercice n° 04*</u> : Fonctions de transfert tension-vitesse et tension-courant

La notice d'un moteur à courant continu indique les caractéristiques suivantes :

· f. c. e. m. par $1000\,\mathrm{tr.mn^{-1}}$: $20\,\mathrm{V}$

· Résistance d'induit : $R = 1\,\Omega$

· Moment d'inertie : $J = 1,5.10^{-4}\,\mathrm{kg.m^2}$.

1) Déterminer les équations électrique et mécanique lorsque le moteur est à vide (frottements négligés) et qu'il est alimenté par une tension $u(t)$; en déduire leur expression en formalisme de Laplace.

2) Exprimer les fonctions de transfert $\Omega(p)/U(p)$ et $I(p)/U(p)$. De quel type de filtrage (passe-bas, passe-bande ou passe-haut) s'agit-il dans chaque cas ? Définir la constante de temps électromécanique.

3) En déduire la réponse en vitesse à un échelon de tension de $20\,\mathrm{V}$ pour le moteur non chargé. On effectuera le calcul à l'aide des transformées de Laplace.

4) Quelle est l'évolution du courant ?

5.1.4. Moteur entraînant une charge

On suppose que les **frottements sont de type visqueux et sec** : $\Gamma_{frot} = \Gamma_{frot\,\mathrm{sec}} - f\omega$

Γ_r, moment des forces, soit de frottements, soit dûes à la charge mécanique est donc :

$$\Gamma_r = \Gamma_{frot} + \Gamma_{charge} = \Gamma_{frot\,\mathrm{sec}} - f\,\omega + \Gamma_{charge}$$

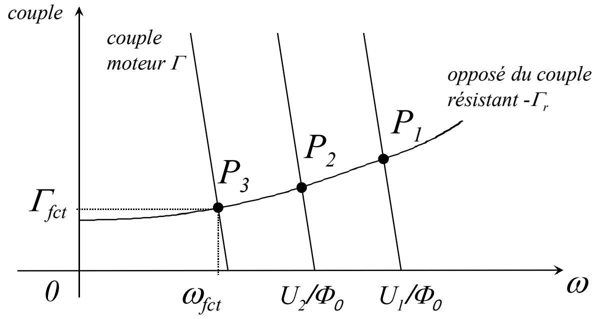
On suppose que l'on sait tracer Γ_r en fonction de la vitesse de rotation ω.

Le théorème du moment cinétique donne: $J\frac{d\omega}{dt} = \sum \Gamma_\Delta = \Gamma + \Gamma_r$ soit

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Phi_o\, i + \Gamma_r$$

.donc en régime permanent $\Gamma + \Gamma_r = 0$ avec $\Gamma = \Phi_o i = \frac{\Phi_o}{R}\left(u - \Phi_o\,\omega\right) = \frac{\Phi_o}{R}u - \frac{\Phi_o^2}{R}\omega$ car l'équation électrique donne $u = \Phi_o\,\omega + Ri$ donc $i = \frac{1}{R}\left(u - \Phi_o\,\omega\right)$.

Il suffit alors de tracer les deux courbes en fonction de ω ($\Gamma(\omega)$ et $-\Gamma_r(\omega)$) et le point de fonctionnement (donc la valeur de la vitesse de rotation ω) correspond à l'intersection :



$\Gamma(\omega) = \frac{\Phi_o}{R}u - \frac{\Phi_o^2}{R}\omega$: le graphe du couple moteur Γ en fonction de la vitesse de rotation ω est donc une droite de pente négative, fortement inclinée car la résistance R est toujours faible dans ce type de moteur pour minimiser les pertes par effet Joule. Elle coupe l'axe des vitesses de rotation pour $\omega = \omega_{\max} = U/\Phi_0$.
Le point de fonctionnement $P(\omega_{fct}, \Gamma_{fct})$ donne une vitesse de rotation ω_{fct} toujours très voisine de la vitesse de rotation maximale $\omega_{\max} = U/\Phi_0$; le moteur continu possède donc une vitesse de rotation qui dépend peu du travail mécanique qu'il fournit ; c'est l'intensité qui s'ajuste pour cela. Cette vitesse est essentiellement fixée par la tension U (cf. P_1, P_2, P_3...).

Exercice n° 05 : Détermination du point de fonctionnement d'un moteur

L'induit d'un moteur à excitation et à flux constant est alimenté sous tension constante. On relève lors d'un essai à vide une vitesse de rotation $\omega_v = 2000\,\mathrm{tr.mn^{-1}}$ et lors d'un essai en charge une vitesse $\omega_c = 1700\,\mathrm{tr.mn^{-1}}$ pour un couple résistant de moment $\Gamma_r = 30\,\mathrm{N.m}$.

1) Déterminer la caractéristique mécanique du moteur en supposant que le montent des forces magnétiques Γ est une fonction affine de la vitesse ω. Quel est le monent Γ_d du couple de démarrage de ce moteur ?

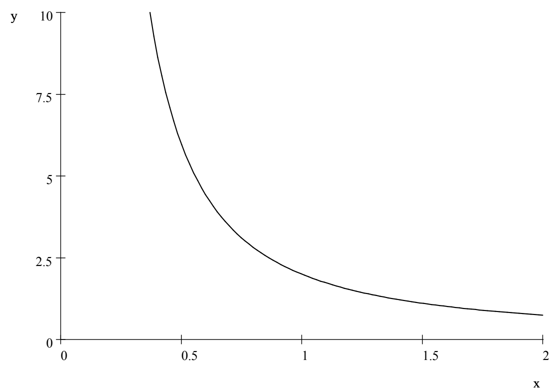
2) En déduire le point de fonctionnement (ω_0, Γ_0) du moteur lorsqu'il entraîne une charge dont le couple résistant a pour moment $\Gamma_r = -10^{-4}\omega^2$ (Γ en N.m et ω en $\mathrm{tr.mn^{-1}}$). Ce point de fonctionnement est-il stable ?

5.2. Cas d'un moteur à excitation indépendante et à flux variable

On suppose maintenant que l'on peut faire varier le courant I_e circulant dans l'inducteur. Dans ce cas $\Phi_o = \Phi_o(I_e)$ =fonction croissante de I_e.
On travaille à $u(t) = U =$ constante ;
en régime permanent $\Gamma + \Gamma_r = 0$ soit $-\Gamma_r = \Gamma = \Phi_o i = \frac{\Phi_o}{R}(U - \Phi_o\omega)$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{\Phi_o}\left(U + R\Gamma_r\frac{1}{\Phi_o}\right)$$

dans le cas d"un couple résistant constant on obtient la courbe :



Tracé de $\omega/\omega_{réf}$ en fonction de $I_e/I_{réf}$

On constate sur cette courbe que si on fait décroître I_e, à U constante, la vitesse de rotation augmente. Dans le cas limite où on éteint l'inducteur ($I_e = 0$) la vitesse de rotation ω tend vers l'infini.

Il ne faut jamais supprimer l'alimentation de l'inducteur lorsque l'induit est sous tension, car le moteur en s'emballant risque d'être détruit.

5.3. Avantages et inconvénients du moteur à courant continu

- **Avantages du moteur à courant continu** :
  - il est particulièrement bien adapté à l'automobile (source continue)
  - il possède une plage de vitesses de fonctionnement très étendue d'où l'utilisation pour la traction ferroviaire par exemple.
- **Inconvénient du moteur à courant continu** :
  Dans la description du fonctionnement de la spire on constate que le sens du courant doit s'inverser lorsque la spire a tourné de 180°. Cette inversion est obtenue par la présence de balais et de contacteurs qui inversent automatiquement la connexion à chaque demi-tour. Ce système mécanique est source d'usure et génère des étincelles (surtout pour des intensités élevées).

6. La génératrice de courant continu ou dynamo

6.1. Caractère réversible d'une machine à courant continu

Une machine à courant continu est réversible et peut être utilisé dans deux cas :

- le freinage du moteur avec ou sans récupération d'énergie ;
- l'obtention d'une tension continue à l'aide d'une génératrice.

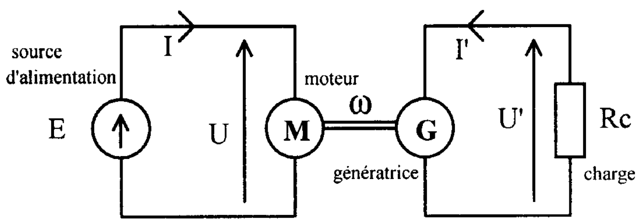
6.2. Freinage d'un moteur

Le freinage par inversion du sens du courant dans un moteur est souvent utilisé.
En général, le moteur est branché sur une résistance de forte puissance pendant la phase de freinage (cas des moteurs de machine à laver en fin d'essorrage, des motrices de T.G.V.).
La récupération nécessite que la f.e.m. moteur soit supérieure à la tension du réseau. Ceci peut être obtenu soit en jouant sur le couplage des induits de plusieurs moteurs, soit en utilisant des hacheurs survolteurs pour transmettre de l'énergie au réseau électrique. Elle n'est donc intéressante que si les phases de freinage se reproduisent souvent (cas du métro, mais pas des T.G.V.).

6.3. Génératrices tachymétriques

Les génératrices à excitation indépendante ne sont plus guère utilisées, sauf en capteurs linéaires de vitesses angulaires, c'est-à-dire en génératrices tachymétriques. Ces génératrices sont des machines de faible puissance à aimants permanents qui fonctionnent, par construction, à flux constant.
Le rotor de la génératrice étant entraîné à la vitesse $\omega(t)$, la tension $u(t)$ délivrée par la machine est une image exacte de la vitesse de rotation de son rotor si l'induit est en circuit ouvert ($i(t) = 0$).
En effet, dans ces conditions, on a : $u(t) = -e(t) = \Phi_o \omega(t)$.
La charge électrique d'une génératrice doit être aussi élevée que possible, sinon infinie. Ce faisant, le couple électromagnétique opposé à la rotation par la génératrice ($\Gamma(t) = \Phi_o i(t) \approx 0$) est quasiment nul: le capteur ne perturbe que faiblement (uniquement par le couple de ses forces de frottement) le sys tème auquel il est associé.

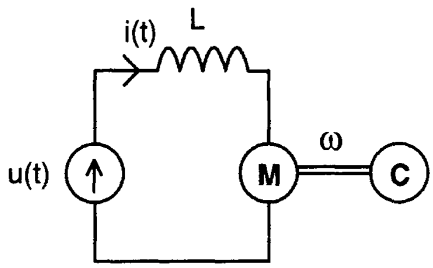
<u>*Exercice n° 06*</u> : Etude d'une association moteur-génératrice à courant continu



On considère l'association de deux machines à courant continu, de caractéristiques rigoureusement identiques, placées sur un même arbre de rotation (i.e. : la vitesse angulaire est commune). La machine "M" est alimentée par une sourc de tension idéale de f.e.m. E, l'autre machine "G" est connectée à une charg électrique résistive de résistance R_c. On note R la résistance électrique du bobinage induit des deux machines et f le coefficient de frottement fluide de l'ensemble.
On s'intéresse au fonctionnement en régime permanent.
Application numérique : $E = 100\,\mathrm{V}$, $R = 1\,\Omega$, $\Phi = 1\,\mathrm{V.rad^{-1}}$, $R_c = 10\,\Omega$, $f = 0,01\,\mathrm{N.m.rad^{-1}.s}$.

1) Ecrire les équations électriques et mécanique des deux machines.
2) Déterminer l'expression, en fonction de Ω, du couple résistant $\overline{C}_r$ résultant des frottements et de la machine G (couple de la charge mécanique équivalente vue par la machine M).
3) Calculer la vitesse angulaire de rotation du système, le couple, l'intensité du courant induit de chaque machine (commenter le signe de I') et la tension aux bornes de la charge électrique.
4) Comparer les puissances moyennes absorbée par la charge électrique et cédée par la source d'alimentation ; interpréter la différence.
5) Que deviennent les résultats des questions précédentes si l'on néglige les frottements et les résistances d'induit ?

Exercice n° 07 : Variations de vitesse et de courant en réponse à une ondulation de tension



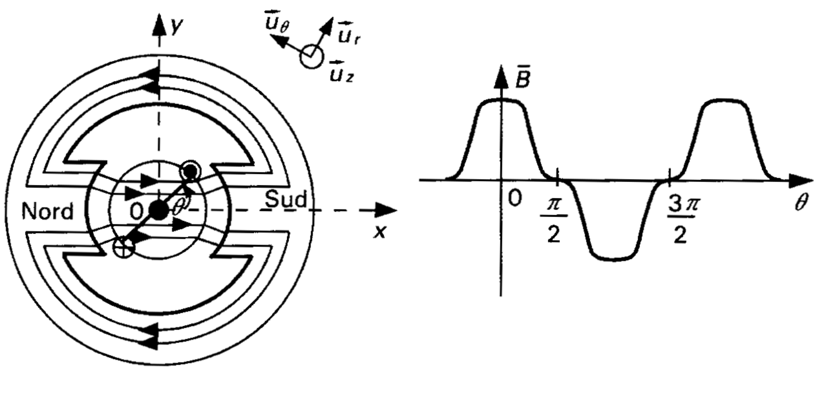
On considère le dispositif ci-dessus comprenant une machine à courant continu M, alimentée par une tension $u(t)$ à travers une bobine d'inductance L (appelée inductance de lissage du courant) et entraînant une charge mécanique de caractéristique couple-vitesse $\overline{C}_r = -\alpha.\omega$.
Données numériques : $\Phi = 1,4\,\mathrm{V.rad^{-1}.s}$, $L = 5.10^{-3}\,\mathrm{H}$, $R = 0,5\,\Omega$, $J = 1,5\,\mathrm{kg.m^2}$, $\alpha = 0,1\,\mathrm{N.m.rad^{-1}.s^{-1}}$.
On se propose d'établir la propriété selon laquelle, dans ce système, le dipôle électrique équivalent à l'association moteur + charge peut être considéré comme une source de courant.
1) Etablir la fonction de transfert $T_e(p) = I(p)/U(p)$. Quel est l'ordre obtenu ? Quel est le type de filtrage (passe-bas, passe-bande ou passe-haut) ?
2) Mettre cette fonction sous la forme canonique convenable (produit de termes du premier ordre ou de termes du second ordre non factorisables dans le corps des réels).
3) Tracer le diagramme de Bode de T_e. Montrer que pour des variations rapides de tension, l'intensité du courant variera beaucoup moins qu'en régime permanent.

7. Les machines réelles

Nous donnons dans ce paragraphe quelques précisions sur les machines réelles.

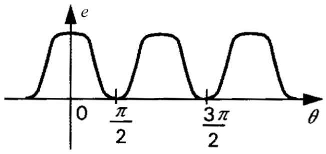
7.1. Ligne neutre

Lors de l'étude du principe de fonctionnement avec une seule spire (paragraphe 2.) nous n'avons pas étudié le système après rotation d'un angle π. Sans dispositif particulier le couple moteur change de signe et la rotation dans un sens déterminé est impossible.
On se limite à un moteur bipolaire possédant 2 conducteurs actifs formant une spire.
La position de la spire parcourue par un courant i, tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz est repérée par l'angle $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$ avec l'axe Ox. Comme au paragraphe 2. nous supposons que le champ magnétique $\vec{B}$ est radial sous les pôles : $\vec{B} = \overline{B}(\theta)\ \vec{e}_r$;
L'axe Oy où le champ magnétique est nul est la ligne neutre (de part et d'autre de cette ligne $\overline{B}$ change de signe).



7.2. Dispositif de commutation

D'après les paragraphe 2.2. et 2.3. $\overrightarrow{\Gamma} = diLB(\theta)\ \overrightarrow{u}_z$ et $e(t) = -d\omega B(\theta)L$: Γ et e sont donc des fonctions périodiques de valeurs moyennes nulles. Pour obtenir un fonctionnement satisfaisant ($\left\langle \overrightarrow{\Gamma} \right\rangle \neq \vec{0}$ et $\langle e \rangle \neq 0$) on utilise un **dispositif de commutation** : les extrémités des spires sont soudées sur un ensemble de lames de cuivre solidaires du rotor et isolées les unes des autres. L'ensemble de ces lames forme le **collecteur** de la machine. Sur le collecteur frottent des **balais** en graphite, solidaires du bâti, donc fixes. Celui-ci permet l'établissement de la liaison électrique entre le circuit d'induit et l'extérieur de la machine.
Lorsque la spire traverse la ligne neutre les lames du collecteur changent de balais et le courant est inversé : Γ et e gardent donc un signe constant : $e(t) = -d\omega\,|B(\theta)|\,L \approx -d\omega B_0 L$.



On pose $\Phi = \pi dLB_0$; Φ est une grandeur homogène à un flux, appelée <u>flux utile sous chacun des pôles</u>. La f.e.m. est donnée par $e = -d\omega B_0 L = -\frac{1}{\pi}\Phi\omega = -k\Phi\omega = -\Phi_0\omega$.

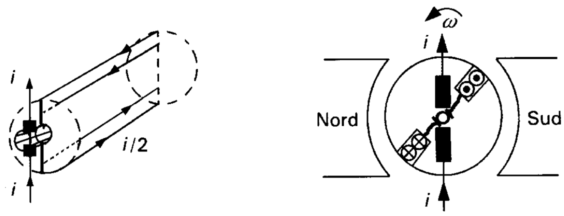
7.3. Vers le moteur réel

Ce moteur trop simple donne un couple non constant en fonction de l'angle θ et de très faible valeur car il ne possède qu'une seule spire.

7.3.1. Machine à N conducteurs actifs

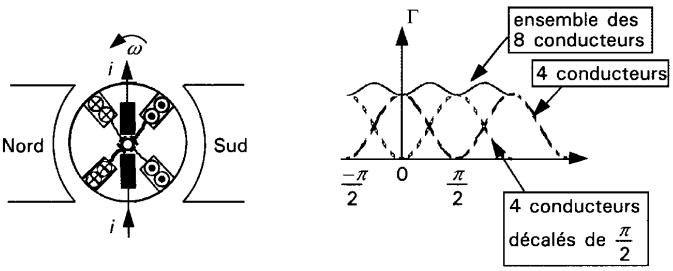
Dans une machine réelle, le nombre N de conducteurs actifs est élevé (de l'ordre de la centaine). Le choix du nombre de collecteurs et la méthode de branchement des différents conducteurs est un problème complexe et chaque constructeur possède sa "recette".

- **Mise en parallèle** :
  Pour diminuer l'intensité qui les traverse, les conducteurs actifs sont répartis en $2a$ **voies** d'enroulement identiques assemblées en parallèle (une voie d'enroulement correspond à la partie du circuit parcouru pour aller d'un balai à l'autre). Lorsque la génératrice débite un courant i, l'intensité à travers chaque conducteur vaut $i/2a$. Cela permet à la génératrice de débiter des courants importants sans risque d'échauffement excessif de son circuit d'induit (le couple et la fém que l'on obtient ne sont pas modifiés).



Augmentation du nombre de conducteurs actifs

- **Mise en série** :
  Chaque voie comporte $N/2a$ conducteurs en série dont les f.e.m. s'ajoutent.
- **Décalage :**
  Il est possible d'optimiser le bobinage pour que la f.e.m. aux bornes du moteur ne présente plus qu'une légère ondulation. Exemple : on ajoute au circuit précédent deux autres spires décalées de $\pi/2$ par rapport aux précédentes. Le circuit comprend $N = 8$ conducteurs actifs. Chaque conducteur parcouru par un courant $i/2$. Le couple électromagnétique présente des ondulations d'amplitude plus faible. Le couple moyen est plus important.



7.3.2. Coefficient de couplage k

Pour une machine multipolaire comportant $2p$ pôles, $2a$ voies d'enroulement et N conducteurs actifs, on définit un coefficient k du couplage électromécanique sans dimension $k = \frac{2p}{2a}\frac{N}{2\pi}$.

7.3.3. Couple électromagnétique Γ

Le moment Γ du couple électromagnétique par rapport à l'axe de rotation est proportionnel à l'intensité i du courant induit à la valeur Φ du flux utile sous un pôle

$$\Gamma = (k\Phi)\, i$$

7.3.4. Fém e

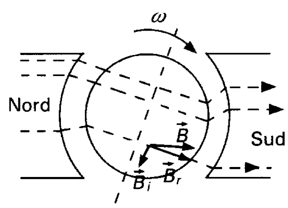
La fém e de la machine est proportionnelle à la vitesse angulaire ω de rotation du rotor et à la valeur Φ du flux utile sous un pôle

$$e = -\,(k\Phi)\,\omega$$

7.4. Les limitations du modèle

7.4.1. La réaction magnétique d'induit

Le bobinage de l'induit parcouru par un courant i crée un champ magnétique $\vec{B}_i$. Le champ magnétique résultant $\vec{B}_r$ est la superposition du champ $\vec{B}$ créé par l'inducteur et du champ $\vec{B}_i$. Il y a donc déformation des lignes de champ, c'est le phénomène de **réaction transversale d'induit**.



L'augmentation du champ magnétique à certains endroits peut provoquer une saturation du milieu magnétique. La ligne neutre est déplacée dans le sens de rotation du rotor.
On annule cette réaction d'induit en créant un champ magnétique opposé au champ $\vec{B}_i$ grâce à un enroulement de compensation mis en série avec l'induit et disposé sur le stator. **La machine est dite compensée**.

7.4.2. Les pertes

- **Les pertes électriques** :
  Elles se produisent par effet Joule dans les circuits électriques de l'inducteur et de l'induit ainsi qu'au niveau des contacts collecteur-balais.
  L'échauffement qui en résulte est réduit par ventilation forcée. Dans ces conditions, la résistance des circuits n'augmente que de 15% à 30%.

- **Les pertes fer :**
  Le rotor est en rotation dans le champ magnétique intense de l'inducteur. Le champ magnétique en un point de celui-ci varie au cours du temps à la fréquence de rotation du moteur.
  Le moteur présente donc des pertes semblables à celles dans la carcasse d'un transformateur, dues au pertes par hystérésis et par courants de Foucault.
  On réduit les pertes par hystérésis en utilisant des matériaux à cycle d'hystérésis étroit et celles par courants de Foucault en utilisant des matériaux de forte résistivité (tôles de silicium,...) feuilletés.

- **Les pertes de commutation :**
  Lors de la commutation d'une spire, le courant qui la traverse n'est pas nul. Une f.e.m. d'induction apparaît dans la spire et provoque une étincelle entre le balai et la lame du collecteur qu'il vient de quitter. Cette étincelle détruit les contacts et dissipe de l'énergie.
  Ce phénomène est atténué à l'aide de dispositifs de commutation auxiliaire.

- **Les pertes mécaniques :**
  Elles sont principalement dues au contact des balais sur le collecteur (sensiblement proportionnelles à la vitesse de rotation) et à la liaison rotor-bâti. Le rendement d'une machine réelle à courant continu est de l'ordre de 80% à 95%, ce qui est excellent comparativement aux rendements des machines thermiques (de l'ordre de 30% à 40% pour une centrale thermique).